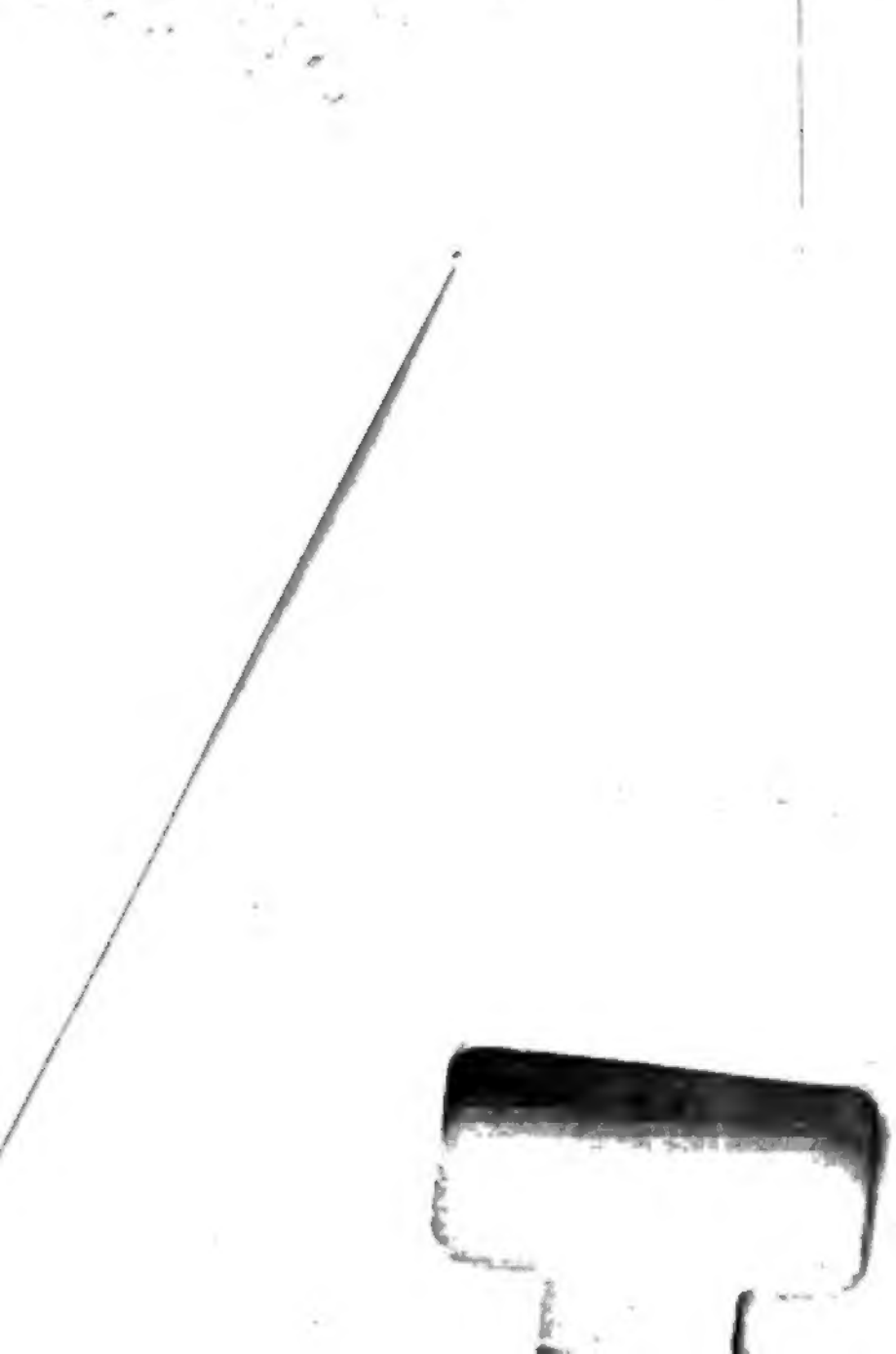


Digitized by Google

3.253

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

B

Digitized by Google

Digitized by Google

METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ *Socio.*

LAUSANNÆ & GENEVÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLIV.

Digitized by Google

Digitized by Google

METHODUS INVENIENDI CURVAS MAXIMI MINIMIVE PROPRIETATE GAUDENTES.

CAPUT PRIMUM.

De Methodo maximorum & minimorum ad lineas curvas inveniendas applicata in genere.

DEFINITIO I.

1. METHODUS *maximorum & minimorum ad lineas curvas applicata*, eſt methodus inveniendi lineas curvas, quæ maximi minimive proprietate quapiam propoſita gaudeant.

COROLLARIUM I.

2. Reperiuntur igitur per hanc methodum lineæ curvæ, in quibus propoſita quæpiam quantitas maximum vel minimum obtineat valorem.

Digitized by Google

COROLL. II.

3. Cum autem eadem curva infinitis modis ſui ſimilis effici queat, Problema, niſi quædam reſtrictio adhibeatur, maxime eſſet indeterminatum, atque adeo nullum. Quæcunque enim curva præbeatur maximi minimive proprietate prædita, ſemper alia, illi quidem vel ſimilis vel diſſimilis, exhiberi poſſet, quæ illam proprietatem, vel majorem, vel minorem, in ſe contineret.

COROLL. III.

4. Quoniam igitur adæquata curvarum cognitio poſtulat, ut eæ ad axem aliquem poſitione datum, ejuſque portiones quaſcunque quæ abſciſſæ vocantur, referantur: prima eaque præcipua reſtrictio ex quantitate abſciſſæ petenda erit.

COROLL. IV.

5. Problemata ergo ad methodum hanc pertinentia ita proponi debent, ut quærantur lineæ curvæ ad axem poſitione datum relatæ, quæ inter omnes alias curvas eidem abſciſſæ reſpondentes maximi minimive proprietate ſint præditæ.

SCHOLION.

6. Hæc itaque Methodus maximorum & minimorum maxime diſcrepat ab illa, quam alibi expoſuimus. Ibi enim, pro data ac determinata linea curva, locum determinavimus, ubi propoſita quædam quantitas variabilis ad curvam pertinens fiat maxima vel minima. Hic autem ipſa linea curva quæritur, in qua quantitas quædam propoſita fiat maxima vel minima. Methodus hæc jam ſuperiori Seculo, mox poſt inventam Analyſin infinitorum, excoli cœpit a Celeb. Fratribus BERNOULLIIS, atque ex eo tempore maxima cepit incrementa. Primum quidem Problema, quod ex hoc genere eſt tractatum, ad Mechanicam reſpiciebat, eoque quærebatur linea curva ſuper qua grave deſcendens citiſſime delabatur; cui *Curvæ brachyſtochronæ* ſeu *Lineæ celerrimi deſcenſus* nomen erat impoſitum. In hoc Problemate jam

jam manifeſtum eſt, id, ſine adjuncta conditione, nequidem nomen quæſtionis retinere poſſe: perſpicuum enim eſt, quo brevior magiſque ad ſitum verticalem accedens linea capiatur, eo fore tempus deſcenſus ſuper ea brevius. Quamobrem non abſolute quæri poteſt linea, ſuper qua grave deſcendens celerrime ſeu breviſſimo tempore delabatur; ſed abſciſſæ quantitas., cui curva invenienda reſpondeat, ſimul debuit definiri; ita ut, inter omnes curvas eidem abſciſſæ in axe poſitione dato ſumtæ reſpondentes, quæreretur ea ſuper qua corpus grave citiſſime delaberetur. Neque vero in hoc Problemate iſta conditio ſufficiebat ad id determinatum efficiendum: ſed inſuper iſtam conditionem adjicere oportuit, ut curva invenienda per data duo puncta tranſeat; atque iſtud Problema his conditionibus adſtringi debuit, ut fieret determinatum, inter omnes, ſcilicet, lineas curvas per data duo puncta tranſeuntes eam determinare ſuper qua corpus deſcendens arcum datæ abſciſſæ reſpondentem breviſſimo tempore abſolvat. Interim tamen hic notandum eſt, conditionem tranſitus per duo puncta non eſſe abſolute neceſſariam, ſed in hoc Problemate per ipſam ſolutionem eſſe illatam. In ſolutione enim hujus Problematis immediate pervenitur ad æquationem differentialem ſecundi gradus, quæ bis integrata duas recipit conſtantes arbitrarias, ad quas determinandas duobus opus eſt punctis per quæ curva traducatur, vel aliis ſimilibus proprietatibus: atque hæc eadem conditio, quaſi ſua ſponte, ad omnia iſtiuſmodi Problemata accedit, quarum ſolutio immediate ad æquationem differentialem ſecundi gradus deducit. In Problematibus autem quæ reſolvuntur per æquationem differentialem quarti vel altioris ordinis, nequidem duo puncta ad curvam determinandam ſufficiunt, ſed tot opus eſt punctis, quot gradus differentialia obtinent. Contra vero, ſi ſolutio ſtatim ad æquationem algebraïcam perducat, tum ſine hujuſmodi conditione Problema perfecte erit determinatum; dummodo abſciſſæ longitudo definiatur. Verum hæc omnia clarius perſpicientur, quando infra ad ſolutiones Problematum perveniemus: ibique has notationes fuſius explicabimus. Hic enim in principio iſta tantum commemorare viſum eſt, ut

perverſas ideas circa determinationem hujuſmodi Problematum tollamus.

DEFINITIO II.

7. *Methodus maximorum ac minimorum abſoluta*, docet inter omnes omnino curvas, ad eandem abſciſſam relatas, determinare eam, in qua propoſita quædam quantitas variabilis maximum minimumve obtineat valorem.

COROLLARIUM.

8. In Problematibus igitur ad hanc methodum pertinentibus, datur axis poſitione; atque, inter omnes curvas quæ ad hunc axem ejuſque determinatam portionem referri poſſunt, determinatur ea in qua quantitas quædam variabilis fit maxima vel minima.

SCHOLION.

9. Aliam conditionem ad maximi minimive determinationem, præter abſciſſæ quantitatem, hic in genere non adjicimus. Dantur enim Problemata, quæ hoc modo perfecte determinantur; quemadmodum infra diſtinctius patebit. Etſi enim etiam ejuſmodi Problemata occurrunt, ad quæ determinanda inſuper duo plurave puncta præſcribi poſſunt, per quæ quæſita curva tranſeat; tamen hoc demum ex ipſa cujuſcunque Problematis ſolutione perſpicietur. Namque ſi ad ejuſmodi æquationem pro curva quæſita perveniatur, in qua per integrationem novæ quantitates conſtantes ſint ingreſſæ, quæ in ipſa quæſtione non inerant; tum ſolutio cenſenda erit ambigua, atque vaga; eo quod innumerabiles lineas curvas, quæ ex determinatione illarum quantitatum conſtantium & arbitrariarum oriri poſſunt, in ſe complectitur. His igitur in caſibus erit concludendum, Problema ex ſua natura non penitus eſſe determinatum: ſed ad ejus plenam determinationem, præter abſciſſæ quantitatem, tot novas conditiones adjungi oportere, quibus illæ arbitrariæ conſtantes ad determinatos valores revocentur. Pro hujuſmodi autem conditionibus commodiſſime aſſumuntur puncta, per quæ curvæ

quæſitæ

Digitized by Google

quæſitæ ſit tranſeundum ; totidem vero puncta , quot inſunt in æquatione inventa quantitates arbitrariæ , ipſam æquationem determinatam reddent. Loco punctorum autem , ad curvam quæſitam perfecte determinandam , adhiberi etiam poſſunt totidem tangentes quæ curvam quæſitam tangant , & , ſi contactus debeat fieri in dato tangentis puncto , hæc conditio duobus punctis æquivalebit. Quin etiam in locum punctorum , aliæ quæcunque conditiones ſubſtitui poſſunt ; dummodo eæ ita ſint comparatæ , ut per eas quantitates arbitrariæ in æquatione inventa contentæ determinentur. Neque vero ante opus eſt ſolutionem ad finem perducere , quam iſta dijudicatio ſuſcipiatur ; ſed infra tradentur certa criteria , quorum ope , ſtatim , ex illa quantitate variabili quæ maximum minimumve eſſe debet , dignoſci poterit quæ novæ conſtantes in æquationem pro curva ingrediantur , quæ in quæſtione non continebantur. Oriuntur autem iſtæ conſtantes arbitrariæ ex gradu differentialium , ad quem æquatio pro curva quæſita exſurgit ; quoti enim gradus prodit æquatio differentialis pro curva quæſita , tot quantitates arbitrariæ in illa cenſendæ ſunt poteſtate ineſſe ; hincque totidem conditionibus opus erit ad curvam determinandam. Idem vero etiam uſu venit in ſolutione omnium Problematum , quando æquatio differentialis vel primi vel altioris gradus invenitur ; ita ut hinc in præſenti inſtituto nulla peculiaris difficultas ineſſe cenſenda ſit.

DEFINITIO III.

10. *Methodus maximorum ac minimorum relativa* docet , non inter omnes omnino curvas eidem abſciſſæ reſpondentes , ſed inter eas tantum quæ præſcriptam quandam proprietatem communem habeant , eam determinare quæ maximi minimive proprietate gaudeat.

COROLL. I.

11. Ad hujuſmodi igitur Problemata ſolvenda , primum , ex omnibus omnino curvis eidem abſciſſæ reſpondentibus eæ ſunt

ſegregandæ, in quas eadem præſcripta proprietas competat; atque tum demum ex his ſegregatis ea quæ quæritur debebit definiri.

Coroll. II.

12. Quanquam autem tali conditione numerus curvarum omnium ad eandem abſciſſam relatarum vehementer reſtringitur; tamen is etiamnum manebit infinitus. Quin etiam, ſi non una, ſed plures proprietates præſcribantur, quibus omnes curvæ ex quibus quæſita eſt determinanda debeant eſſe præditæ; tamen uſque numerus curvarum manebit infinitus.

Coroll. III.

13. Quo plures itaque proponuntur proprietates, quæ iis curvis ex quibus quæſitam definiri oportet communes eſſe debeant; eo magis numerus curvarum inter quas electio quæſitæ eſt inſtituenda reſtringetur, etiamſi maneat infinitus.

Scholion I.

14. Ex hoc genere, in quo Methodum maximorum & minimorum relativam conſtituimus, initio hujus Seculi, primum a *Jacobo* Bernoullio in medium prolatum eſt famoſum illud *Problema Iſoperimetricum*; in quo quærebatur curva maximi minimive proprietate prædita, non inter omnes curvas ad eandem abſciſſam relatas, ſed inter eas tantum quæ ejuſdem eſſent longitudinis; ex quo iſtæ curvæ, ex quibus quæſitam erui oportebat, *iſoperimetræ* ſunt appellatæ. Ita ſi, inter omnes curvas eidem abſciſſæ reſpondentes & longitudine æquales, quæratur ea quæ cum abſciſſa & applicata maximum ſpatium includat; reperitur quæſito linea circularis ſatisfacere: quod quidem jam diu ante inventam hanc methodum Geometris innotuerat, ac demonſtratum erat. At, hoc caſu iterum, ex ipſa Problematum natura, novæ conditiones accedunt; uti in iis, quæ ad Methodum maximorum ac minimorum abſolutam pertinent; quæ

Digitized by Google

quæ ex conſtantibus arbitrariis, quas ſolutio inducit, ſunt æſtimandæ. Ita in ſolutione Problematis, quo curva quæritur quæ inter omnes ejuſdem longitudinis maximam comprehendat aream cum abſciſſa, duæ conſtantes novæ ingrediuntur; ex quo, ad Problema determinatum efficiendum, id ita eſt proponendum, ut inter omnes curvas ejuſdem longitudinis, quæ non ſolum eidem abſciſſæ reſpondeant, ſed etiam per data duo puncta tranſeant, quæratur ea quæ ad datam abſciſſam maximam aream referat. Atque ſimili modo evenire poteſt, ut quatuor puncta, & plura etiam interdum, pro arbitrio aſſumi debeant, quo Problema fiat determinatum: cujus rei dijudicatio ex ipſa Problematum natura eſt petenda. Quemadmodum autem, in Problemate iſoperimetrico, omnes curvæ ex quibus quæſitam determinari oportet ejuſdem longitudinis ponuntur; ita loco hujus proprietatis alia quæcunque proponi poteſt, quæ omnibus communis eſſe debeat. Sic jam quæſitæ ſunt curvæ maximi minimive proprietate præditæ, inter omnes eas curvas ad eandem abſciſſam relatas tantum, quæ circa eam abſciſſam converſæ omnes æquales ſuperficies generent; atque ſimili modo aliæ quæcunque proprietates proponi poſſunt. Deinde etiam, non una, ſed plures hujuſmodi proprietates præſcribi poſſunt, quæ omnibus curvis inter quas ea quæ maximum minimumve aliquod contineat definienda ſit communes eſſe debeant. Ita ſi quæreretur curva maximi vel minimi proprietate quapiam prædita, inter omnes curvas eidem abſciſſæ reſpondentes, quæ tam eſſent omnes inter ſe longitudine æquales, quam etiam areas æquales concluderent.

SCHOLION II.

15. Propter hoc diſcrimen inter Methodum maximorum & minimorum abſolutam ac relativam, tractatio noſtra erit bipartita. Primum ſcilicet methodum trademus, inter omnes omnino curvas eidem abſciſſæ reſpondentes, eam determinandi quæ maximi minimive proprietate ſit prædita. Deinde vero progrediemur ad ejuſmodi Problemata, in quibus curva maximi minimive proprietate

prietate gaudens poſtulatur, inter omnes curvas quæ unam plureſve propoſitas proprietates communes habeant; atque ex numero harum proprietatum iſtius tractationis denuo ſubdiviſio orietur. Interim tamen non opus erit in hac ſubdiviſione longius progredi; cum mox reperiatur methodus, quotcunque etiam propoſitæ fuerint proprietates, Problemata facile reſolvendi. Solutiones enim Problematum prima fronte maxime intricatorum præter opinionem fient perquam expeditæ, ac levi calculo abſolvendæ.

HYPOTHESIS I.

16. *In hac tractatione abſciſſam, ad quam omnes curvas referemus, perpetuo littera* x, *applicatam vero littera* y *deſignabimus. Tum vero, ſumptis elementis abſciſſæ æqualibus, ſemper erit* dy = pdx; dp = qdx; dq = rdx; dr = sdx; *&c.*

COROLL. I.

17. His igitur ſubſtitutionibus omnia differentialia ipſius *y* cujuſcunque gradus ex expreſſionibus tollentur, atque præter differentiale *dx* nulla alia differentialia relinquentur. Quanquam autem hoc modo omnia differentialia, præter *dx*, ſpecie tantum, non revera tolluntur; tamen hæ ſubſtitutiones ingens nobis in præſenti inſtituto afferent ſubſidium.

COROLL. II.

18. Quin etiam hujuſmodi ſubſtitutionibus differentialis conſtantis aſſumtio penitus de calculo tollitur: quodcunque enim differentiale aliud conſtans aſſumatur, poſt iſtas ſubſtitutiones perpetuo eadem formula emergere debet. Interim tamen, ob methodum infra adhibendam, neceſſe erit differentiale *dx* tanquam conſtans aſſumere.

COROL-

Digitized by Google

Coroll. III.

19. Ut autem facilius appareat, quomodo per has ſubſtitutiones differentialia cujuſque gradus ipſius y evaneſcant; juvabit ſequentem Tabellam adjeciſſe.

$$\begin{aligned} dy &= p\,dx \\ ddy &= dp\,dx = q\,dx^2 \\ d^3y &= dq\,dx^2 = r\,dx^3 \\ d^4y &= dr\,dx^3 = s\,dx^4 \\ d^5y &= ds\,dx^4 = t\,dx^5 \\ &\text{\&c.} \qquad \text{\&c.} \qquad \text{\&c.} \end{aligned}$$

Coroll. IV.

20. Quod ſi etiam arcus curvæ abſciſſæ x reſpondens, cum ſuis differentialibus cujuſcunque gradus occurrat; ea omnia per iſtas litteras ita exprimi poterunt, ut nulla alia differentialia præter dx adſint. Poſito enim arcu $= w$ erit.

$$\begin{aligned} w &= \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int dx \sqrt{(1+pp)} \\ dw &= dx\sqrt{(1+pp)} \\ ddw &= \frac{pq\,dx^2}{\sqrt{(1+pp)}} \\ d^3w &= \frac{pr\,dx^3}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{qq\,dx^3}{(1+pp)^{3:2}} \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

Coroll. V.

21. Simili modo, ex his radius oſculi ſeu curvedinis curvæ, in quovis loco, per quantitates ſpecie ſaltem finitas poterit exprimi. Cum enim, poſito elemento dx conſtante, ſit longitudo radii oſculi $= \frac{-dw^3}{dx\,ddy}$; fiet ea $= \frac{-(1+pp)^{3:2}}{q}$

Coroll. VI.

22. Porro ex iisdem substitutionibus erit, ut sequitur.

$$\text{Subtangens} = \frac{y\,dx}{dy} = \frac{y}{p}$$

$$\text{Subnormalis} = \frac{y\,dy}{dx} = py$$

$$\text{Tangens} = \frac{y\,dw}{dy} = \frac{y\sqrt{(1+pp)}}{p}$$

$$\text{Normalis} = \frac{y\,dw}{dx} = y\sqrt{(1+pp)}$$

Atque, pari modo, omnes quantitates finitæ ad curvam pertinentes, nisi integralia involvant, per hujusmodi quantitates finitas ita exprimi poterunt, ut nulla differentialia amplius inesse videantur.

Definitio IV.

23. *Maximi minimive Formula*, pro quovis Problemate, nobis erit ea quantitas, quæ in curva quæsita maximum minimumve valorem obtinere debet.

Coroll. I.

24. Quoniam in omnibus Problematibus ad quæ hæc Methodus est accommodata, curva quæritur quæ, vel inter omnes, vel tantum inter innumeras curvas certo modo determinatas, maximi minimive proprietate gaudeat; hæc ipsa proprietas, quæ in curva quæsita maxima vel minima esse debet, erit quantitas; eaque exprimetur Formula, quam maximi minimive Formulam hîc appellamus.

Coroll. II.

25. Cum autem maximi minimive proprietas ita proponi debeat, ut ad datam ac determinatam abſciſſam referatur; Formula maximi minimive quoque ad illam definitam abſciſſam debet referri.

Coroll. III.

26. Erit igitur maximi minimive Formula, quantitas variabilis a longitudine abſciſſæ cujuſcunque cui reſpondet pendens. Atque in quovis Problemate quæretur curva, pro qua, ad definitam abſciſſam, illa maximi minimive Formula maximum minimumve obtineat valorem.

Coroll. IV.

27. Neque vero maximi minimive Formula a ſola abſciſſa pendere poteſt: hoc enim ſi eſſet, pro omnibus curvis eidem abſciſſæ reſpondentibus eundem obtineret valorem, atque idcirco omnes æqualiter ſatisfacerent.

Coroll. V.

28. Hanc ob rem quoque maximi minimive Formula, præter abſciſſam omnibus curvis quæ in conſiderationem veniunt communem, a qualibet curva peculiariter debet pendere; ita ut una ſit, pro qua maximum minimumve valorem induere queat.

Scholion I.

29. Quo hæc omnia clarius intelligantur, atque ſtatus Quæſtionum in ſequenti pertractandarum melius comprehendatur; ponamus, vel inter omnes omnino curvas, vel tantum inter innumerabiles certam quamdam proprietatem communem habentes, quæ eidem abſciſſæ A Z reſpondeant, eam determinari debere, *Fig. 1.*

Digitized by Google

Fig. 1. pro qua valor formulæ W fit maximus vel minimus. Ponamus huic Quæſtioni ſatisfacere curvam a m z, ita ut, quæcunque alia curva ad abſciſſam definitam A Z referatur, valor formulæ W vel fiat minor quam pro hac curva, vel major: prout in curva ſatisfaciente, W vel maximum eſſe debet vel minimum. In hac igitur quæſtione latiſſime patente, habemus primo abſciſſam determinatæ longitudinis A Z: deinde curva eſt quærenda, vel inter omnes ommino curvas ad eandem hanc abſciſſam relatas, vel tantum inter innumerabiles quibus una pluresve proprietates ſint communes, prout quæſtio ad methodum maximorum & minimorum vel abſolutam vel relativam eſt accommodata: tertiò habemus eam quantitatem W, cujus valor in curva quæſita a m z maximus eſſe debet vel minimus; eritque igitur quantitas W maximi minimive formula, ſicut ea eſt definita. Nunc igitur ſtatim apparet hanc formulam W ita eſſe debere comparatam, ut ad omnes curvas quæ quidem concipi poſſunt accommodari queat. Primo ſcilicet a quantitate abſciſſæ definitæ A Z debebit pendere; ita ut ea mutetur, valore ipſius A Z mutato. Deinde etiam a natura cujuſvis curvæ quæ quidem concipi poteſt peculiari modo debet pendere: niſi enim ita eſſet comparata, pro omnibus curvis eundem valorem ſortiretur, quæſtioque foret nulla. Quamobrem quantitas W, præter abſciſſam, in ſe quoque complecti debebit quantitates ad curvam ipſam pertinentes. Cum igitur omnis curva determinetur per relationem inter abſciſſam & applicatam, quantitas W debet eſſe conflata ex abſciſſa & applicata, & quantitatibus independentibus. Hoc eſt, ſi abſciſſa indefinita ponatur $= x$, & applicata reſpondens indefinita $= y$; quantitas W eſſe debet functio binarum variabilium x & y. Quod cum ita ſit, ſi curva quæcunque determinata concipiatur, atque ex ejus natura relatio inter y & x in formula W ſubſtituatur, ea definitum impetrabit valorem ad datam illam curvam atque ejus definitam abſciſſam pertinentem. Quoniam jam, pro aliis atque aliis curvis, formula W diverſos valores induit, etiamſi in omnibus abſciſſa eadem capiatur; manifeſtum eſt inter innumerabiles illas curvas unam

unam esse debere in qua valor formulæ W maximus fiat vel minimus; atque ad hanc curvam pro data quacunque determinata quæstione inveniendam, Methodus tradenda est comparata.

Coroll. VI.

30. Erit igitur maximi minimive formula W, functio quædam binarum variabilium x & y: quarum altera x abscissam, altera y applicatam denotat. In W inesse igitur poterunt, non solum ipsæ variabiles x & y, sed etiam omnes quantitates ab iis pendentes, cujusmodi sunt p, q, r, s, &c. quarum significationes supra tradidimus. Quinetiam formulæ integrales ex his ortæ quæcunque in W inesse possunt: imo etiam debent; siquidem quæstio debeat esse determinata, uti mox ostendemus.

Coroll. VII.

31. Proposita igitur ejusmodi formula W, seu functione ipsarum x & y, si quæstio ad methodum maximorum & minimorum absolutam pertineat, ejusmodi æquatio inter x & y desideratur, ut, si in W valor ipsius y per x determinatus substituatur, atque ipsi x valor definitus tribuatur; major prodeat quantitas pro W, vel minor, quam si ulla alia æquatio inter x & y assumta fuisset.

Coroll. VIII.

32. Hoc ergo pacto, quæstiones ad doctrinam linearum curvarum pertinentes ad Analysin puram revocari possunt. Atque viceissim, si hujus generis quæstio in Analysi pura sit proposita, ea ad doctrinam de lineis curvis poterit referri ac resolvi.

Scholion II.

33. Quanquam hujus generis quæstiones ad puram Analysin

reduci poſſunt, tamen expedit eas cum doctrina linearum curvarum conjungere. Quod ſi enim animum a lineis curvis abducere, atque ad ſolas quantitates abſolutas firmare velimus; quæſtiones primum ipſæ admodum fierent abſtruſæ & inelegantes, uſuſque earum ac dignitas minus conſpiceretur: Deinde etiam methodus reſolvendi hujuſmodi quæſtiones, ſi in ſolis quantitatibus abſtractis proponeretur, nimium foret abſtruſa & moleſta; cum tamen eadem, per inſpectionem figurarum & quantitatum repræſentationem linearem, mirifice adjuvetur atque intellectu facilis reddatur. Hanc ob cauſam, etſi hujus generis quæſtiones, cum ad quantitates abſtractas, tum concretas applicari poſſunt, tamen eas ad lineas curvas commodiſſime traducemus & reſolvemus. Scilicet quoties æquatio ejuſmodi inter x & y quæritur, ut formula quædam propoſita & compoſita ex x & y, ſi ex illa æquatione quæſita valor ipſius y ſubrogetur, & ipſi x determinatus valor tribuatur, maxima fiat vel minima: tum ſemper quæſtionem transferemus ad inventionem lineæ curvæ, cujus abſciſſa ſit x, & applicata y, pro qua illa formula W fiat maxima vel minima, ſi abſciſſa x datæ magnitudinis capiatur. His igitur notatis, natura hujuſmodi quæſtionum ſatis luculenter perſpicitur: niſi forte cuiquam adhuc dubium creat ambigua locutio de maximo & minimo ſimul. Verum ne hîc quidem ulla adeſt ambiguitas; nam etſi methodus ipſa æque monſtrat maxima & minima, tamen in quovis caſu facile erit diſcernere, utrum ſolutio præbeat maximum an minimum. Sæpe numero autem evenire poteſt, ut in data quæſtione tam maximum quam minimum locum obtineat, atque his caſibus ſolutio erit duplex, altera monſtrante maximum, altera minimum. Plerumque autem alterutrum, ſcilicet vel maximum vel minimum ſolet eſſe impoſſibile; quod evenit, ſi maximi minimive formula in infinitum vel creſcere vel decreſcere poteſt; his enim caſibus, vel non dabitur maximum, vel non minimum, Uſu venire etiam poteſt, ut formula propoſita W in infinitum tam creſcere quam decreſcere queat, atque his caſibus nulla prorſus ſolutio locum habe-

Digitized

habebit. Hæc autem discrimina cuncta ipse calculus post solutionem perpetuo monstrabit.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

34. *Ut per maximi minimive formulam* W, *curva determinetur* amz, *quæ præ omnibus reliquis satisfaciat, formula* W *debet esse quantitas integralis indefinita, quæ, nisi data assumatur relatio inter* x *&* y, *integrari nequeat.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim formulam W integralia indefinita non involvere; erit ea functio quantitatum x & y, indeque pendentium p, q, r, s, &c. vel algebraïca, vel talis transcendens quæ sine assumta relatione inter x & y exhiberi possit; quod evenit, si vel logarithmi harum quantitatum, vel arcus circulares, vel aliæ hujusmodi quantitates transcendentes definitæ ingrediantur, quæ algebraïcis æquivalentes sunt censendæ. Quod si jam W ponatur functio talis ipsarum x & y tantum, manifestum est valorem formulæ W, quem pro data curva amz ad datam abscissam AZ relata obtinet, tantum ab ultima applicata Zz pendere; atque pro omnibus curvis in Z eandem applicatam Zz habentibus fore eundem; atque adeo tali formula W indoles totius curvæ non determinabitur, sed tantum positio extremi ejus puncti z; si in W præter x & y etiam quantitas p insit, tum præter longitudinem applicatæ Zz positio tangentis curvæ in z, seu positio ultimi elementi in z determinabitur. Sin autem insuper q ingrediatur, tum positio binorum elementorum curvæ contiguorum in z determinabitur, & ita porro. Ex quibus sequitur, si fuerit W functio determinata ipsarum x, y, p, q, r, &c. tum per illam tantum curvæ portionem infinite parvam circa extremitatem z determinari: atque pro omnibus curvis in eandem extremitatem definentibus eundem valorem ipsius W esse proditurum. Ut itaque per formulam W tota curva amz, quatenus toti abscissæ AZ respondet, definiatur, formulam

mulam W ita oportet esse comparatam, ut ejus valor ad determinatam curvam a m z applicatus, a positione singulorum elementorum hujus curvæ intra terminos a & z sitorum pendeat. Hoc autem evenire non potest, nisi quantitas W sit formula integralis indefinita, quæ generatim sine assumta æquatione inter x & y integrationem non admittat. *Q. E. D.*

Coroll. I.

35. Nisi igitur maximi minimive formula W sit quantitas integralis indefinita, nequidem linea curva in qua valor ipsius W sit maximus vel minimus determinabitur; atque adeo quæstio de invenienda curva, in qua esset W maximum vel minimum erit nulla.

Coroll. II.

36. Ut igitur curva assignari possit, in qua valor ipsius W præ aliis sit maximus vel minimus, formula W talem formam $\int Z dx$ habere debet; atque quantitatem Z ita comparatam esse oportet ut differentiale $Z dx$, nisi æquatio statuatur inter x & y, integrari nequeat.

Scholion.

37. Quoniam maximi minimive formula W debet esse integrale formulæ differentialis indefinitæ primi gradus; hoc est cujus integrale fiat quantitas finita; ea formula differentialis semper ad hujusmodi formam $Z dx$ poterit reduci, ope litterarum p, q, r, &c. Et hanc ob rem in sequentibus maximi minimive formula perpetuo per $\int Z dx$ nobis indicabitur. Erit autem Z functio non solum quantitatum x & y, sed etiam continebit litteras p, q, r, &c. Ita si area A a z Z debeat esse maxima vel minima, formula W abibit in $\int y dx$; &, si superficies solidi rotundi quod generatur rotatione curvæ a m z circa axem A Z debeat esse maxima vel minima, erit $W = \int y dx \sqrt{(1+pp)}$; atque

atque ita porro quæcunque formula debeat in curva quæſita eſſe maxima vel minima, ea ſemper erit hujus formæ $\int Z\,dx$, ſcilicet integrale quantitatis finitæ cujuſdam Z in differentiale dx ductæ. Debet autem Z ejuſmodi eſſe quantitas, ut ſi æquatio ſtatuatur inter x & y, integrale $\int Z\,dx$ determinatum obtineat valorem: ex quo Z erit functio quantitatum x, y, & inde pendentium p, q, r, &c. vel algebraïca ſive determinata, vel præterea ipſa in ſe complectetur formulas integrales indeterminatas; quod diſcrimen probe eſt tenendum. Ita ſi maximi minimive formula W fuerit $\int y\,dx$, vel $\int y\,dx\sqrt{(1+pp)}$; quantitas Z erit algebraïca, at ſi ſit $W = \int y\,x\,dx \int y\,dx$, tum erit $Z = yx\int y\,dx$, hoc eſt ipſa quantitas Z erit indeterminata, cujus valor niſi relatio inter x & y detur, exhiberi nequit. Quin etiam evenire poteſt, ut valor ipſius Z hujuſmodi formula evoluta exprimi nequeat, ſed tantum per æquationem differentialem demum erui debeat, ut ſi fuerit $dZ = y\,dx + Z\,Z\,dx$; ex qua æquatione valor ipſius Z per x & y nequidem exhiberi poteſt. Hinc igitur tria naſcuntur genera formularum $\int Z\,dx$, quæ in curvis quæſitis maxima vel minima fieri debent. Quorum primum eas complectitur formulas, in quibus Z eſt functio algebraïca ſeu determinata ipſarum x, y, & p, q, r, &c. Ad ſecundum genus referimus eas formulas, in quibus quantitas Z ipſa inſuper formulas integrales involvit. In tertio autem genere continentur eæ formulæ, in quibus valor ipſius Z per æquationem differentialem cujus integratio non conſtat determinatur.

PROPOSITIO II. THEOREMA.

38. *Si fuerit* a m z *curva, in qua valor formulæ* $\int Z\,dx$ *ſit maximus vel minimus, atque* Z *ſit functio algebraïca ſeu determinata ipſarum* x, y, p, q, r, &c. *tum ejuſdem curvæ quæcunque portio* m n *eadem gaudebit prærogativa, ut pro ea ad ſuam abſciſſam* M N *relata, valor ipſius* $\int Z\,dx$ *ſit pariter maximus vel minimus.*

DEMONSTRATIO.

Valor formulæ $\int Z\,dx$ pro abſciſſa AZ eſt aggregatum omnium valorum ejuſdem formulæ, qui ſingulis abſciſſæ AZ portionibus reſpondent. Quod ſi ergo abſciſſa AZ in parter quotcunque, quarum una ſit MN, diviſa concipiatur, atque ad ſingulas partes haſce valor formulæ $\int Z\,dx$ exhibeatur; ſumma omnium horum valorum præbebit valorem formulæ $\int Z\,dx$, qui toti abſciſſæ AZ convenit; & qui erit maximus vel minimus. Quoniam autem Z ponitur functio algebraïca ipſarum x, y, p, q, &c. valor formulæ $\int Z\,dx$ reſpondens abſciſſæ portioni MN, a ſola portionis curvæ reſpondentis mn indole pendebit, idemque manebit, utcunque reliquæ partes am & nz varientur; ſingularum enim litterarum x, y, p, q, &c. valores per ſolam curvæ portionem mn determinantur. Si ergo formulæ $\int Z\,dx$ valores, qui conveniunt abſciſſæ portionibus AM, MN, NZ, ponantur P, Q & R, quantitates hæ P, Q, & R, a ſe mutuo non pendebunt. Quare cum earum aggregatum $P+Q+R$ ſit maximum vel minimum, etiam unaquaque maximi minimive proprietate prædita ſit neceſſe eſt. Hanc ob rem, ſi in curva amz formula $\int Z\,dx$ maximum minimumve habeat valorem, & quantitas Z ſit functio algebraïca ipſarum x, y, p, q, &c. tum etiam, pro qualibet illius curvæ portione, eadem formula $\int Z\,dx$ maximi minimive proprietate gaudebit. *Q. E. D.*

COROLL. I.

39. Quod ſi ergo curva fuerit inventa amz, quæ pro abſciſſa data AZ, habeat valorem formulæ $\int Z\,dx$ maximum vel minimum, atque Z ſit functio algebraïca ſeu determinata, tum etiam ejuſdem curvæ quælibet portio, reſpectu abſciſſæ ſuæ reſpondentis, eadem maximi minimive proprietate gaudebit.

COROLL. II.

40. In hujuſmodi igitur Problematibus, ubi tale maximum minimumve quæritur, non opus eſt quantitatem abſciſſæ, cui maximum minimumve reſpondeat, definire; ſed ſi, pro una quacunque abſciſſa, formula $\int Z dx$ ſit maximum vel minimum, tum eadem pro quacunque alia abſciſſa eadem proprietate gaudebit.

COROLL. III.

41. Hujuſmodi igitur Problemata reſolventur, ſi ſingulæ curvæ quæſitæ particulæ ita determinentur, ut pro iis valor formulæ $\int Z dx$ fiat maximus vel minimus. Tum enim ſimul tota curva, & quæcunque ejus portio, pariter eadem maximi minimive proprietate erit inſtructa.

SCHOLION.

42. Proprietas hæc, qua gaudent curvæ in quibus iſtius modi formulæ $\int Z dx$, ubi Z eſt functio algebraïca ſeu determinata ipſa um x, y, p, q, &c. ſunt maximum vel minimum, eſt maximi momenti; ea enim innititur univerſa methodus hujus generis Problemata reſolvendi. Ideo autem potiſſimum hanc Propoſitionem afferre viſum eſt, ne ea proprietas, quæ his tantum formulis $\int Z dx$, ubi Z eſt functio vel algebraïca vel determinata, eſt propria, omnium omnino formularum quæ proponi poſſunt communis eſſe putetur: in ſequente enim Propoſitione demonſtrabimus, ſi in Z inſint formulæ integrales; tum eandem proprietatem non amplius locum habere: ex quo ſimul natura hujuſmodi quæſtionum clarius intelligetur. Hujus autem præſentis Propoſitionis demonſtratio ex eo petita eſt fundamento, quod valor formulæ $\int Z dx$, ſiquidem Z eſt functio vel algebraïca vel determinata ipſarum x, y, p, q, r, &c. qui convenit cuicunque abſciſſæ portioni M N, a ſola curvæ portione reſpondente m n pendeat, neque a reliqua curva, vel anteriore a m, vel poſteriore n z afficiatur: quæ ratio ceſſat, ſi in Z inſint for-

mulæ integrales indeterminatæ. Valores enim quantitatum x, y, p, q, r, &c. qui pro arcu curvæ m n obtinent, tantum a positione elementorum hujus arcus m n, atque elementis aliquot contiguis quæ arcum finitæ quantitatis non constituunt pendent; ex quo etiam quantitas ex iis litteris utcunque composita per solam arcus m n indolem determinabitur, nisi adfuerint quantitates integrales, cujusmodi sunt $\int y\,dx$, quæ totam aream anteriorem A a m M introduceret, vel $\int dx\sqrt{(1+pp)}$, quæ totum arcum præcedentem a m involveret. Hinc igitur distinctius intelligitur, quid per functionem determinatam ipsarum x, y, p, q, r, &c. denotare velimus: Functio scilicet determinata ita est comparata, ut, pro quovis loco, a præsentibus valoribus litterarum x, y, p, q, &c. tantum pendeat, neque valores earum anteriores in se complectatur. Functio autem indeterminata est talis, cujus valor in quovis loco, non ex solis valoribus quos hæ litteræ x, y, p, q, &c. in isto loco obtinent determinari potest, sed insuper omnes valores ad sui determinationem requirit, quos istæ litteræ in omnibus locis anterioribus obtinuerunt. Ita patet, omnes functiones algebraïcas esse simul determinatas; præterea vero etiam omnes functiones transcendentes, quæ a relatione inter x & y non pendent sunt determinatæ, cujusmodi sunt, $l\sqrt{(xx+yy)}$, e^{py}, Asin. $\frac{py}{q}$; quarum valores in quovis loco ex valoribus litterarum, quos in hoc solo loco obtinent, assignari possunt. Quando autem in functione quapiam insunt formulæ integrales indeterminatæ, quæ a mutua relatione inter x & y, quam ubique tenent, pendent, tum earum valor, in dato loco, non ex valoribus, quos hæ litteræ in isto loco habent, cognosci potest, sed insuper omnes valores in locis quibusque anterioribus nosse oportet, hoc est generalem relationem inter coordinatas x & y: talesque functiones vocamus indeterminatas; quippe quæ toto cœlo diversæ sunt ab iis, quas determinatas appellavimus.

PRO-

PROPOSITIO III. THEOREMA.

43. *Si fuerit* a m z *curva abſciſſa* A Z *reſpondens, in qua* $\int Z\,dx$ *ſit maximum vel minimum, in* Z *autem contineantur formulæ integrales indeterminatæ; tum eadem maximi minimive proprietas non cadit in quamlibet curvæ portionem, ſed toti tantum curvæ abſciſſæ* A Z *reſpondenti propria erit.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur tota curva a m z, pro qua $\int Z\,dx$ eſt maximum vel minimum, in duas partes quaſque diviſa per applicatam M m; ſitque formulæ $\int Z\,dx$ valor conveniens portioni a m $=$ P, ejuſdem autem formulæ valor pro altera portione m z ſit $= Q$: pro tota igitur curva a m z valor formulæ $\int Z\,dx$ erit $= P + Q$, quem ponimus eſſe maximum vel minimum. Quo autem omnem ambiguitatem tollamus, totamque rem diſtinctius proponere queamus; ponamus $P + Q$ eſſe maximum: quod enim de maximo demonſtrabitur, idem de minimo facile intelligetur. Quod ſi jam valor ipſius Q a valore ipſius P non penderet, tum aggregatum $P + Q$ maximum eſſe non poſſet, niſi ſimul uterque valor P & Q ſeorſim ſit maximus. At noſtro caſu, quo quantitas Z in ſe continet formulas integrales indeterminatas, valor ipſius Q non tantum a curvæ portione m z ad quam refertur pendebit, ſed ſimul a tota curva anteriore a m; atque adeo a valore ipſius P. Nunc dicimus, ad id ut $P + Q$ ſit maximum, non requiri, ut valor ipſius P ſit maximus. Ponamus enim portionem curvæ a m ita eſſe comparatam, ut pro ea P ſit maximum, & aliquantillum mutari concipiatur portio curvæ a m, ita ut valor formulæ $\int Z\,dx$ minor evadat, puta $= P - p$: fieri utique poterit ut ex hac mutatione valor ipſius Q creſcat, quod incrementum ponatur q: eritque, mutata aliquantillum portione a m, ita ut pro ea $\int Z\,dx$ non amplius ſit maximum, valor formulæ $\int Z\,dx$ pro tota curva a m z $= P - p + Q + q$. Cum igitur evenire queat ut ſit $q > p$, intelligitur formu-

lam $\int Z dx$ pro tota curva amz maximam esse posse, etiamsi maxima non sit pro qualibet portione am. *Q. E. D.*

Coroll. I.

44. Quando ergo curva fuerit inventa, quæ, pro data abscissa AZ, habeat valorem formulæ $\int Z dx$ maximum vel minimum, & Z sit functio indeterminata; tum non sequitur quamlibet curvæ inventæ portionem eadem maximi minimive proprietate fore præditam.

Coroll. II.

45. In resolutione igitur hujusmodi Problematum, in quibus curva quæritur, quæ pro data abscissa AZ habeat $\int Z dx$ maximum vel minimum, perpetuo ad totius abscissæ propositæ quantitatem erit respiciendum, atque maximum vel minimum ad eam tantum, non vero ad ejus quamlibet portionem, accommodari debebit.

Coroll. III.

46. Maximum igitur hinc patet discrimen, quod inter formulas $\int Z dx$, in quibus Z functio est determinata vel indeterminata, intercedit; simulque autem Methodorum diversitas intelligitur, quibus ad resolutiones quæstionum, in quibus hujusmodi formularum maximi minimive valores requiruntur, uti oportebit.

S C H O L I O N.

47. Ex demonstratione hujus Propositionis non quidem necessario sequitur, si pro data abscissa AZ curva habeat formulam $\int Z dx$ maximam vel minimam, tum singulas ejus portiones eadem hac prærogativa gaudere; verumtamen satis intelligitur, quoties eadem proprietas in singulas portiones competat, id casu

Digitized by Google

fu evenire. Hincque nihilominus ſumme neceſſarium eſt, ſolutionem perpetuo ad totam propoſitam abſciſſam accommodare. Interim tamen, in Problematibus ad methodum relativam pertinentibus evenire poteſt, ut formulas $\int Z dx$, in quibus Z ſit functio indeterminata, quaſi determinata eſſet tractare liceat. Hoc ſcilicet accidit, ſi inter omnes tantum curvas in quibus formulæ illæ integrales indeterminatæ quæ in Z inſunt æquales obtinent valores, ea deſideretur, in qua $\int Z dx$ ſit maximum vel minimum : hoc enim caſu formulæ illæ integrales indeterminatæ fieri cenſendæ ſunt determinatæ. Ita ſi, inter omnes curvas ejuſdem longitudinis, determinanda ſit ea in qua ſit $\int Z dx$ maximum vel minimum, atque in Z præter quantitates determinatas, inſit arcus curvæ $\int dx \sqrt{(1+pp)}$; hic, quia in omnibus curvis ex quibus quæſitam definire oportet, eundem obtinet valorem, inſtar functionis determinatæ tractari poterit. Hæc autem cuncta in ſequentibus clarius explicabuntur.

HYPOTHESIS II.

48. *Si curvæ abſciſſa* AZ *in elementa innumerabilia infinite parva & inter ſe æqualia diſſecetur, cujuſmodi ſunt* IK, KL, LM, *&c. atque portio quæcunque* AM *vocetur* x, *cui reſpondeat functio quæcunque variabilis* F, *eandem functionem* F, *quatenus referetur ad puncta abſciſſæ vel ſequentia* N, O, P, Q, *&c. vel antecedentia* L, K, I, *&c. ita denotabimus, ut ſit valor iſtius functionis qui pro puncto* M *eſt* = F, *ut ſequitur.* Fig. 2.

pro N = F′
pro O = F″
pro P = F‴
pro Q = F⁗
pro R = F⁗′
} *pro punctis abſciſſæ ſequentibus*

&c.

pro

$$\left.\begin{array}{l} pro\ L = F_{,} \\ pro\ K = F_{,,} \\ pro\ I = F_{,,,} \\ pro\ H = F_{,,,,} \\ \quad \&c. \end{array}\right\} \text{ pro punctis abſciſſæ antecedentibus.}$$

Atque hoc pacto, ſine prolixa differentialium ſcriptione, valor functionis cujuſcunque variabilis, qui in quovis abſciſſæ puncto locum obtinet, commode indicabitur.

Coroll. I.

49. Cum igitur functionis cujuſque valor, in loco quocunque, ſit æqualis ſuo valori in loco antecedente differentiali ſuo aucto, erit

$F' = F + dF$	$F^{,} = F_{,} + dF_{,}$
$F'' = F' + dF'$	$F_{,} = F_{,,} + dF_{,,}$
$F''' = F'' + dF''$	$F_{,,} = F_{,,,} + dF_{,,,}$
$F'''' = F''' + dF'''$	$F_{,,,} = F_{,,,,} + dF_{,,,,}$
&c.	&c.

Coroll. II.

50. Si ex ſingulis abſciſſæ diviſionibus applicatæ ducantur, æque ea quæ abſciſſæ $AM = x$ reſpondet, nempe Mm, ponatur $= y$, reliquæ tam ſequentes quam antecedentes, ita denotabuntur

$Mm = y$	$Mm = y$
$Nn = y'$	$Ll = y_{,}$
$Oo = y''$	$Kk = y_{,,}$
$Pp = y'''$	$Ii = y_{,,,}$
$Qq = y''''$	$Hh = y_{,,,,}$
&c.	&c.

Co-

COROLL. III.

51. Cum deinde valor ipſius p ſit $= \frac{dy}{dx} = \frac{Nn - Mm}{dx}$; erit $p = \frac{y' - y}{dx}$; ſequentes autem pariter ac antecedentes ipſius p valores ita ſe habebunt:

$$p = \frac{y' - y}{dx}$$
$$p' = \frac{y'' - y'}{dx}$$
$$p'' = \frac{y''' - y''}{dx}$$
$$p''' = \frac{y^{IV} - y'''}{dx}$$
&c.

$$p = \frac{y' - y}{dx}$$
$$p_1 = \frac{y - y_1}{dx}$$
$$p_{II} = \frac{y_1 - y_{II}}{dx}$$
$$p_{III} = \frac{y_{II} - y_{III}}{dx}$$
&c.

COROLL. IV.

52. Deinde, quia eſt $q = \frac{dp}{dx} = \frac{p' - p}{dx}$ erit $q = \frac{y'' - 2y' + y}{dx^2}$; ex quo quantitatis q valores, cum ſequentes tum antecedentes, ita ſe habebunt:

$$q = \frac{y'' - 2y' + y}{dx^2}$$
$$q' = \frac{y''' - 2y'' + y'}{dx^2}$$
$$q'' = \frac{y^{IV} - 2y''' + y''}{dx^2}$$
&c.

$$q = \frac{y'' - 2y' + y}{dx^2}$$
$$q_1 = \frac{y' - 2y + y_1}{dx^2}$$
$$q_{II} = \frac{y - 2y_1 + y_{II}}{dx^2}$$
&c.

COROLL. V.

53. Simili igitur modo per iſta applicatarum ſigna poterunt

valores quantitatum r, s, t, &c. ut has ſupra aſſumſimus, determinari, atque ex figura definiri. Erit ſcilicet

$$r = \frac{y''' - 3y'' + 3y' - y}{dx^3}$$
$$s = \frac{y'' - 4y''' + 6y'' - 4y' + y}{dx^4}$$
$$t = \frac{y'' - 5y'^{v} + 10y''' - 10y'' + 5y' - y}{dx^5}$$
&c.

unde harum litterarum valores tam præcedentes quam antecedentes formari poſſunt.

COROLL. VI.

54. Quod ſi autem formula $\int Z\,dx$ ad abſciſſam $AM = x$ fuerit relata; erit ejus valor ſequenti abſciſſæ elemento $MN = dx$ reſpondens $= Z\,dx$. Hincque ſimili modo formulæ $\int Z\,dx$ valores ſingulis abſciſſæ elementis reſpondentes denotabuntur ut ſequitur:

pro $MN = Z\,dx$	pro $MN = Z\,dx$
pro $NO = Z'\,dx$	pro $LM = Z_{,}\,dx$
pro $OP = Z''\,dx$	pro $KL = Z_{,,}\,dx$
pro $PQ = Z'''\,dx$	pro $IK = Z_{,,,}\,dx$
&c.	&c.

COROLL. VII.

55. Si ergo expreſſio $\int Z\,dx$ ad abſciſſam curvæ $AM = x$ pertineat; ejuſdem expreſſionis valor, qui conveniet abſciſſæ propoſitæ AZ, erit $= \int Z\,dx + Z\,dx + Z'\,dx + Z''\,dx + Z'''\,dx$ + &c. in infinitum, donec perveniatur ad ultimum punctum Z.

COROLL. VIII.

56. Si igitur curva inveniri debeat, quæ pro data abſciſſa AZ valo-

valorem formulæ $\int Z\,dx$ habeat maximum minimumve; tum, posita abscissa quacunque indefinita $AM = x$, efficiendum est ut hæc expressio $\int Z\,dx + Z\,dx + Z'\,dx + Z''\,dx + Z'''\,dx +$ &c. usque in Z fiat maxima vel minima.

SCHOLION.

57. Quanquam hæc hypothesis tantum pro arbitrio est facta; tamen ista signa maximam afferent utilitatem ad Problemata, quæ ad hanc methodum maximorum & minimorum pertinent, succincte resolvenda. Plurimum enim valet in hujusmodi negotiis commoda signorum electio, ejusque ope calculus non solum contrahi, sed etiam multo facilior & expeditior reddi potest. Præstabit autem iste signandi modus longe alteri recepto, quo per differentialia valores functionum variabilium proxime sequentes exprimi solent; eo quod in ipsa resolvendi methodo alius generis differentialia occurrent, quæ cum naturalibus quantitatum variabilium differentialibus facile confundi possent, nisi, ista assumta signandi methodo o naturalia differentialia notatione saltem tollerentur.

PROPOSITIO IV. THEOREMA.

58. *Si* amnoz *fuerit curva ad abscissam datam* AZ *relata, in qua formula* $\int Z\,dx$ *maximum minimumve obtineat valorem; atque alia concipiatur curva* amvoz *ab ista infinite parum discrepans, tum valor formulæ* $\int Z\,dx$ *pro utraque curva erit idem.* *Fig. 3.*

DEMONSTRATIO.

Quando in Analysi formula quæpiam variabilis fit maxima, tum primo crescendo continuo magis ad maximum valorem accedit, deinde vero cum hunc attigit, iterum decrescendo ab eo recedit. Iste autem accessus ad maximum valorem atque recessus ab eodem ita fit, ut dum quantitas proxime ad maximum valorem versatur, tum ejus incrementa ac decrementa momenta-

nea evaneſcant; hocque idem de minimo eſt intelligendum. Dantur quidem etiam ejuſmodi maxima & minima, circa quæ incrementa & decrementa ſint infinite magna; verum hujus generis maxima & minima in præſenti inſtituto raro locum inveniunt, & ſi inveniunt, facile erit ea determinare. Sufficiat igitur notaſſe circa maximum & minimum mutationes momentaneas non dari poſſe finitas. Quod ſi ergo in curva amnoz expreſſio $\int Z dx$ maximum minimumve habeat valorem; pro alia curva ejuſdem expreſſionis valor eo magis a maximo minimove recedet, quo magis hæc alia curva ab illa diſcrepet. Sin autem alia curva infinite parum differat ab illa ſatisfaciente, tum, pro utraque, formula $\int Z dx$ eundem obtinebit valorem. Hujuſmodi autem curvam minime diſcrepantem concipiemus, ſi arcum tantum infinite parvum mno infinite parum variari, ejuſque loco arcum m′o ſubſtituï ponamus. Quamobrem ex curva az, pro qua $\int Z dx$ maximum eſt vel minimum, portionem infinite parvam mno exſcindi, ejuſque loco aliam m′o infinite parum ab illa diſcrepantem inſeri intelligamus; tum valor formulæ $\int Z dx$ qui convenit curvæ amnoz æqualis erit valori, qui convenit curvæ am′oz. *Q. E. D.*

Coroll. I.

59. Quoniam mutatio debet poni quamminima; non ſufficiet arcum mno, qui immutari ponitur, accipere infinite parvum, ſed etiam deviatio n′, præ arcus longitudine mno, debet eſſe infinite parva.

Coroll. II.

60. Poſita igitur tali mutatione in curva, mutatio inde etiam in valore formulæ $\int Z dx$ orietur; quæ autem per demonſtrationem erit evaneſcens. Atque hoc modo ex tali aſſumta mutatione orietur æquatio, quæ ſimul curvæ quæſitæ naturam præbebit.

SCHO-

SCHOLION.

61. In hac Propoſitione continetur univerſa methodus reſolvendi Problemata, quibus curva deſideratur in qua valor formulæ cujuſdam indeterminatæ ut $\int Z dx$ ſit maximus vel minimus. Semper enim concipitur portio curvæ infinite parva, uti mno, aliquantillum variari in m,o, atque tum quæritur differentia valorum quos formula $\int Z dx$, cum pro curva vera amnoz, tum pro ficta am,oz, ſortitur, eaque differentia nihilo æqualis poſita dat naturam curvæ quæſitæ. Mutatio autem iſta in loco indefinito fieri debet, ut ad totam curvam pertineat, atque ad ſingula loca pateat. Poteſt autem iſta mutatio utcunque inſtitui, dummodo ſit infinite parva, atque vel ad duo vel plura curvæ elementa extendi; ſemper enim eadem reſultare debet æquatio finalis. Interim tamen calculi commoditas poſtulat, ut mutatio in tam paucis elementis inſtituatur, quæ ſufficiat ad ſolutionem abſolvendam. Ita ſi, inter omnes omnino curvas eidem abſciſſæ reſpondentes, ea determinari debeat, in qua ſit $\int Z dx$ maximum vel minimum; tum ſufficiet bina tantum curvæ elementa mutata concipere. At ſi non inter omnes curvas, ſed eas tantum quæ unam pluresve expreſſiones communes habeant, ea definiri debeat in qua quæpiam quantitas ſit maxima vel minima; tum mutationem non quamcunque m,o accipere licet, ſed talem ſtatui oportet, ut illæ proprietates omnibus curvis communes conſerventur. His igitur caſibus, duo elementa non ſufficient, ſed plura accipi debebunt, ut omnibus conditionibus ſatisfieri queat.

DEFINITIO V.

62. *Valor Differentialis* datæ maximi minimive formulæ reſpondens eſt differentia inter valores, quos hæc formula, cum in ipſa curva quæſita, tum in eadem infinite parum immutata, obtinet.

COROLL. I.

63. In curva igitur, pro qua data formula, puta $\int Z dx$, maximum minimumve esse debet, hujus formulæ valor differentialis respondens evanescet. Atque hanc ob rem si valor differentialis nihilo æqualis ponatur; habebitur æquatio, qua curvæ quæsitæ natura exprimetur.

COROLL. II.

64. Ex invento igitur valore differentiali, qui propositæ maximi minimive formulæ respondeat, statim habebitur æquatio exprimens naturam ejus curvæ, in qua formula illa proposita maximum minimumve habeat valorem.

COROLL. III.

65. Totum igitur negotium ad curvas inveniendas, quæ maximi minimive proprietate gaudeant, eo est reductum, ut pro quaque maximi minimive formula ejus conveniens valor differentialis investigetur.

SCHOLION.

66. Cum igitur in genere tradita sit idea non solum naturæ quæstionum, quibus curvæ maximi minimive proprietate præditæ quæruntur, sed etiam methodi, qua ad eas resolvendas uti oporteat, ad ipsam tractationem progrediemur. Ac primo quidem Methodum absolutam, qua curvæ quæruntur quæ inter omnes omnino curvas ad eandem abscissam relatas maximi minimive proprietate quapiam sint præditæ, trademus. Deinde pergemus ad Methodum maximorum ac minimorum relativam, ad quam tales pertinent quæstiones, quæ non inter omnes curvas datæ abscissæ respondentes, sed eas tantum quæ data quadam communi proprietate una pluribusve gaudent, eam determinari jubent, cui maximi minimive prærogativa quæpiam conveniat.

nlat. In has autem tractationes natura formulæ $\int Z\,dx$, quæ maximum minimumve esse debet, ingens discrimen infert, prout Z fuerit functio vel determinata vel indeterminata; quemadmodum jam observavimus.

CAPUT II.

De Methodo maximorum ac minimorum ad lineas curvas inveniendas absoluta.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

1. *SI in curva quacunque* amz *una applicata quævis* Nn *augeatur particula infinite parva* nν; *invenire incrementa vel decrementa, quæ singulæ quantitates determinatæ ad curvam pertinentes hinc accipient.* Fig. 4.

SOLUTIO.

Quantitates determinatæ ad curvam propositam pertinentes sunt, præter abscissam x, quæ non afficitur, hæ y, p, q, r, s, &c. cum suis derivatis valoribus, quos in locis vel sequentibus vel antecedentibus sortiuntur. Quod si nunc ponamus AM $= x$, & Mm $= y$, erit Nn $= y'$, hujusque valor per translationem puncti n in ν augebitur particula nν, reliquæ autem applicatæ y'', y''', y^{IV}, &c. pariter ac præcedentes y_I, y_{II}, y_{III}, y_{IV} &c. non afficientur. Cum igitur sola applicata y' crescat particula nν; ex Cap. præc. §. §. 51 & seqq. colligetur quantum incrementum reliquæ quantitates omnes capiant ex incremento solius applicatæ y'. Omnes scilicet quantitates, quarum valor pendet ab y', mutationem subibunt, reliquæ vero, quæ ab y' non pendent, manebunt invariatæ. Ita cum sit $p = \frac{y' - y}{dx}$ hæc quantitas p crescet particula $\frac{n\nu}{dx}$; at cum sit $p' = \frac{y'' - y'}{dx}$, hæc quantitas p' de-

p' decrescet particula $\frac{n\nu}{dx}$. Similique modo reliquarum quantitatum incrementa vel decrementa reperientur, delendo in earum valoribus supra exhibitis omnes valores ipsius y, praeter hunc y', hujusque loco scribendo $n\nu$. Hoc modo omnium quantitatum determinatarum, quae quidem mutationem patiuntur, incrementa in sequenti Tabella congessimus

Quant.	*Increm.*
y'	$+ n\nu$
p	$+ \frac{n\nu}{dx}$
p'	$- \frac{n\nu}{dx}$
$q_{,}$	$+ \frac{n\nu}{dx^2}$
q	$- \frac{2n\nu}{dx^2}$
q'	$+ \frac{n\nu}{dx^2}$
$r_{,,}$	$+ \frac{n\nu}{dx^3}$
$r_{,}$	$- \frac{3n\nu}{dx^3}$
r	$+ \frac{3n\nu}{dx^3}$
r'	$- \frac{n\nu}{dx^3}$

Quant.	*Increm.*
$s_{,,}$	$+ \frac{n\nu}{dx^4}$
$s_{,}$	$- \frac{4n\nu}{dx^4}$
$s_{,}$	$+ \frac{6n\nu}{dx^4}$
s	$- \frac{4n\nu}{dx^4}$
s'	$+ \frac{n\nu}{dx^4}$
$t_{,,,}$	$+ \frac{n\nu}{dx^5}$
$t_{,,}$	$- \frac{5n\nu}{dx^5}$
$t_{,}$	$+ \frac{10n\nu}{dx^5}$
$t_{,}$	$- \frac{10n\nu}{dx^5}$
t	$+ \frac{5n\nu}{dx^5}$
t'	$- \frac{n\nu}{dx^5}$

Atque ex hac Tabella etiam ulteriorum quantitatum, si quae occurrunt, incrementa vel decrementa facile cognosci poterunt. *Q. E. I.*

COROLL. I.

2. Cognitis igitur incrementis harum quantitatum primariarum ad curvam pertinentium, inde omnium quantitatum ex iis compoſitarum incrementa, quæ oriuntur ex aucta applicata y', determinari poterunt, ſi ratio compoſitionis ſpectetur.

COROLL. II.

3. Harum ſcilicet quantitatum incrementa exhibita, conſiderari poterunt tanquam earum differentialia. Atque ſi propoſita fuerit quantitas quæcunque ex illis compoſita, ejus conveniens incrementum ex tranſlatione puncti n in ν ortum invenietur, differentiando illam quantitatem, & loco differentialium ſingularum quantitatum, ſcribendo ea incrementa, quæ his quantitatibus ſunt adſcripta.

COROLL. III.

4. Si igitur habeatur hæc functio $y'\sqrt{(1+pp)}$, cujus incrementum, quod ex tranſlatione puncti n in ν oritur ſit determinandum; ea functio primum differentietur; unde prodibit $dy'\sqrt{(1+pp)} + \frac{y'p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$; hicque loco dy' & dp ſcribantur incrementa quantitatibus y' & p convenientia, nempe $+n\nu$ & $+\frac{n\nu}{dx}$; eritque functionis propoſitæ incrementum $= +n\nu.\sqrt{(1+pp)} + \frac{y'p.n\nu}{dx\sqrt{(1+pp)}}$.

COROLL. IV.

5. Expedite igitur per differentiationem functionis cujuſcunque incrementum, quod ex incremento n, applicatæ y' oritur, aſſignari poteſt; id quod ex inſpectione figuræ difficulter & minime generaliter fieri poteſt.

SCHOLION.

6. Probe notandum eſt hunc modum incrementa functionum ſeu quantitatum ex x, y, p, q, &c. harumque derivatis y', y'', p', p'', &c. datarum incrementa inveniendi, tantum ad functiones determinatas patere, minime vero ad indeterminatas extendi poſſe. Quod ſi enim functio propoſita fuerit indeterminata, ſeu formula integralis indefinita, integrationem neque algebraïce neque tranſcendenter admittens, tum differentiatione nihil conſequimur ad ejus incrementum inveniendum. In ſequentibus autem, ubi ejuſmodi maximi minimive formulas $\int Z\,dx$ ſumus contemplaturi, in quibus Z ſit functio talis indeterminata, in hujuſmodi functionum incrementa ſumus inquiſituri. Sin autem Z fuerit functio determinata, propoſiti Problematis ſolutio ſufficere poteſt ad ſolutiones Problematum huc pertinentium abſolvendas.

PROPOSITIO II. PROBLEMA.

Fig. 4. 7. *Si fuerit* Z *functio determinata ipſarum* x *&* y *tantum, invenire curvam* a z, *in qua valor formulæ* $\int Z\,dx$ *ſit maximus vel minimus.*

SOLUTIO.

Concipiatur abſciſſa A Z, cui maximum minimumve formulæ $\int Z\,dx$ reſpondere debet, diviſa in innumerabilia elementa æqualia, ſingula per dx denotanda; poſitaque abſciſſa indefinita A M $= x$, & applicata M m $= y$, ex formula $\int Z\,dx$ elemento M N reſpondebit $Z\,dx$; atque ſecundum receptum notandi modum, elemento ſequenti N O reſpondebit $Z'\,dx$, & ſequentibus elementis O P, P Q &c. reſpondebunt valores $Z''\,dx$, $Z'''\,dx$, &c. antecedentibus vero elementis L M, K L, I K, reſpondebunt $Z_{,}\,dx$; $Z_{,,}\,dx$; $Z_{,,,}\,dx$, &c. Quare ſi curva a z ſit ea ipſa quæ quæritur, debebit eſſe $Z\,dx + Z'\,dx + Z''\,dx +$ &c. una cum

$Z_{,}\,dx$

$Z_{,}dx + Z_{,,}dx + Z_{,,,}dx +$ &c. maximum vel minimum. Quod ſi igitur una applicata $Nn = y'$ augeatur particula nv, illa expreſſio eundem valorem retinere, atque adeo valor differentialis formulæ $\int Z dx$, ſeu ſummæ terminorum $Z dx + Z' dx + Z'' dx + Z''' dx +$ &c. una cum $Z_{,}dx + Z_{,,}dx + Z_{,,,}dx +$ &c. evaneſcere debet. Singulorum igitur horum terminorum valores differentiales, qui oriuntur ex tranſlatione puncti n in v, inveſtigari debebunt; eorumque aggregatum erit valor differentialis formulæ $\int Z dx$ reſpondens, qui poſitus $= o$ æquationem pro curva quæſita præbebit. Quoniam autem Z ponitur functio determinata ipſarum x & y; habebit ipſius differentiale dZ hujuſmodi formam $M dx + N dy$; ita ut ſit $dZ = M dx + N dy$. Valorum igitur derivatorum ipſius Z differentialia ita ſe habebunt.

$dZ' = M' dx + N' dy'$	$dZ_{,} = M_{,} dx + N_{,} dy_{,}$
$dZ'' = M'' dx + N'' dy''$	$dZ_{,,} = M_{,,} dx + N_{,,} dy_{,,}$
&c.	&c.

Cum nunc valores differentiales terminorum $Z dx$, $Z' dx$, $Z'' dx$, &c. itemque ipſorum $Z_{,} dx$, $Z_{,,} dx$, &c. inveniantur, ſi hi termini differentientur, atque loco dy' in differentialibus ſcribatur nv, loco omnium reliquorum differentialium vero o; manifeſtum eſt ſolum terminum $Z' dx$ habiturum eſſe valorem differentialem, quoniam in ejus ſolius differentiali occurrit dy'. Scripto itaque nv loco dy', erit termini $Z' dx$ valor differentialis $= N' dx . nv$, qui ſimul erit valor differentialis totius formulæ $\int Z dx$; quia reliqui termini præter $Z' dx$ nullam variationem patiuntur. Loco N' autem ponere poterimus N, quia eſt $N' = N + dN$, & dN præ N evaneſcit. Pro curva igitur quæſita, in qua ſit $\int Z dx$ maximum vel minimum, iſta habetur æquatio $N dx . n, = o$ ſeu $N = o$; exiſtente $dZ = M dx + N dy$. *Q. E. I.*

Coroll. I.

8. Si igitur curva debeat definiri, in qua sit $\int Z\,dx$ maximum vel minimum, atque Z sit functio determinata ipsarum x & y tantum; tum quantitatem Z differentiari oportet; quod cum habiturum sit hujusmodi formam $dZ = M\,dx + N\,dy$, hinc formabitur æquatio pro curva quæsita, quæ erit $N = 0$.

Coroll. II.

9. Cum ergo N sit functio ipsarum x & y determinata, in æquatione pro curva $N = 0$ nulla inerit quantitas constans, quæ non fuit in formula maximi minimive $\int Z\,dx$; & hanc ob rem curva inventa erit unica & perfecte determinata.

Coroll. III.

10. In quæstionibus igitur sub hoc Problemate comprehensis, curva satisfaciens ex sola maximi minimive formula determinatur; neque licebit insuper puncta aliqua præscribere, per quæ curva quæsita transeat.

Coroll. IV.

11. Quod si Z fuerit functio tantum ipsius x, ita ut y non involvat; erit tum $\int Z\,dx$ functio determinata pariter ipsius x tantum; eique adeo omnes curvæ eidem abscissæ respondentes æque satisfacient. Idem vero hoc monstrat calculus; hoc enim casu, quo in Z non inest y, fiet $N = 0$; ideoque nulla prodit æquatio pro curva quæsita.

Coroll. V.

12. Statim etiam intelligi potest, utrum detur linea curva, in qua hujusmodi formula $\int Z\,dx$ sit maximum vel minimum. Si enim ex differentiatione ipsius Z ejusmodi valor pro N reperiatur;

tur, ut per æquationem $N = 0$ nulla curva exprimatur; tum etiam nulla curva extat in qua propoſita formula $\int Z\,dx$ ſit maximum vel minimum.

COROLL. VI.

13. Denique etiam perſpicitur, hanc maximi minimive proprietatem non uni alicui determinatæ abſciſſæ eſſe adſtrictam; ſed ſi curva pro una abſciſſa reddat formulam $\int Z\,dx$ maximum vel minimum, eandem pro quacunque alia abſciſſa, pariter maximum minimumve valorem eſſe habiturum.

SCHOLION I.

14. Nacti ergo ſumus methodum facilem, inter omnes curvas eidem abſciſſæ reſpondentes, eam determinandi, in qua conſtituat formula $\int Z\,dx$ valorem maximum vel minimum, ſiquidem Z eſt functio determinata ipſarum x & y tantum. Simul vero etiam patet curvam ſatisfacientem ſemper fore algebraïcam, ſiquidem Z fuerit functio algebraïca ipſarum x & y. Curvæ igitur hoc modo inventæ iſta erit proprietas, ut ſi ad eandem abſciſſam alia quæcunque conſtituatur linea curva, tum pro ea valor formulæ $\int Z\,dx$ certo vel minor vel major ſit proditurus quam pro inventa; prout in inventa formula $\int Z\,dx$ vel ſuerit maxima vel minima. Cum autem adhuc dubium ſit utrum in curva inventa valor formulæ $\int Z\,dx$ futurus ſit maximus an minimus; de eo in quovis caſu particulari facile fiet dijudicatio; in genere autem nihil omnino decidi poteſt. Interim hoc certum eſt, ſi unica prodit æquatio, tum tantum vel maximum vel minimum locum habere poſſe; hoc eſt, ſi curva inventa ſit pro maximo; tum minimum non dari, ſed valorem formulæ $\int Z\,dx$ in infinitum diminui poſſe. Pari modo, ſi unica inventa fuerit curva, in eaque formula $\int Z\,dx$ ſit minima, tum valorem $\int Z\,dx$ in infinitum augeri poſſe. Quod ſi autem ſolutio nullam prorſus præbeat curvam ſatisfacientem, id indicio erit valorem formulæ

$\int Z dx$ pro quacunque abſciſſa tam in infinitum creſcere quam decreſcere poſſe.

SCHOLION II.

15. Ex eadem etiam ſolutione reperiri poterunt illæ curvæ maximi minimive proprietate prædita alterius generis ſupra memoratæ, ad quas non pervenitur per valores differentiales evaneſcentes, ſed infinite magnos; quod maximorum & minimorum genus ab illo maxime diſcrepat. Reperientur autem iſtæ curvæ, ſi valor differentialis Ndx. n, non nihilo, ſed infinito æqualis ponatur. Quoties igitur hæc æquatio $N = \infty$ lineam aliquam curvam ſuggerit; tum in ea pariter formula $\int Z dx$ maximum vel minimum obtinebit valorem: Hoc ſcilicet eveniet, quando pro N prodit fractio, cujus denominator nihilo æqualis poſitus, præbet æquationem pro aliqua linea curva. Hoc itaque pacto plures curvæ reperiri poſſunt, quæ eidem quæſtioni ſatisfaciant; quarum aliæ maxima continebunt, aliæ minima. Fieri etiam poteſt, ut plures quam duæ curvæ Problemati ſatisfacientes reperiantur, etiamſi binæ tantum oriri queant æquationes, ſcilicet $N = 0$ & $N = \infty$. Si enim N fuerit quantitas ex factoribus compoſita; tum quilibet factor, vel nihilo vel infinito æqualis poſitus, dabit æquationem pro curva ſatisfaciente; conſtat enim ſæpenumero plura maxima pluraque minima locum habere poſſe. Hæc autem omnia clarius enodabuntur in ſequentibus Exemplis in hoc Problemate contentis.

EXEMPLUM I.

16. *Invenire curvam, quæ, inter omnes omnino curvas eidem abſciſſæ reſpondentes, habeat* $\int X Y dx$ *maximum vel minimum; denotante* X *functionem ipſius* y, *&* Y *ipſius* y *tantum.*

In hoc igitur caſu fiet $Z = XY$; ideoque $dZ = Y dX + X dY = M dx + N dy$. Erit ergo $M = \frac{Y dX}{dx}$ & $N = \frac{X dY}{dy}$;

&

ob X ipſius x & Y ipſius y functionem. Pro curva igitur quæſita erit $N = \frac{X\,dY}{dy} = 0$: quoniam autem Y eſt functio ipſius y, ponatur $dY = \Theta\,dy$; erit Θ pariter functio ipſius y; ideoque pro curva quæſita, ſi quæ ſatisfacit, habetur hæc æquatio $X\Theta = 0$, ideoque vel $X = 0$, vel $\Theta = 0$; quarum cum neutra lineam curvam præbeat, apparet huic quæſtioni nullam omnino curvam ſatisfacere, ſed valorem propoſitum $\int XY\,dx$ in infinitum cum augeri tum diminui poſſe. Ex æquatione autem $\Theta = 0$, quia Θ eſt functio ipſius y, ſequitur $y =$ *Conſt.* quæ æquatio præbet lineam rectam parallelam abſciſſæ AZ, cujus diſtantia tanta eſt, ut fiat functio Y maxima vel minima. Patet enim, ſi quantitas Y maximum minimumve valorem admittat, tum etiam formulam $\int XY\,dx$ fieri maximum vel minimum. Altera autem æquatio $X = 0$, quia præbet $x =$ *Conſt.* nequidem lineam rectam quæſtioni ſatisfacientem exhibet; quia præbet lineam rectam normalem ad abſciſſam, quæ propterea non datæ abſciſſæ cuipiam, ſed tantum ejus uni puncto reſpondebit.

EXEMPLUM II.

17. *Invenire curvam, quæ, inter omnes eidem abſciſſæ reſpondentes curvas, habeat valorem formulæ* $\int (ax - yy)\,y\,dx$ *maximum vel minimum.*

Si hæc formula cum generali $\int Z\,dx$ comparetur, fiet $Z = axy - y^3$, ideoque $dZ = ay\,dx + (ax - 3yy)\,dy$; ita ut fiat $M = ay$ & $N = ax - 3yy$; unde pro curva quæſita habebitur iſta æquatio $ax - 3yy = 0$, ſeu $yy = \frac{1}{3}ax$, quæ eſt pro Parabola verticem in A, axem AZ & parametrum $= \frac{1}{3}a$ habente. In hac igitur Parabola, erit valor formulæ $\int (ax - yy)\,y\,dx$ maximus vel minimus. Utrum autem ſit maximus an minimus, reperietur, ſi aliam quamcunque lineam loco Parabolæ ſubſtituamus, atque inquiramus utrum pro ea valor formulæ propoſitæ major ſit an minor quam pro Parabola. Sumamus igitur

Digitized by Google

igitur lineam rectam cum ipso axe congruentem, pro qua erit $y = o$. Pro hac itaque valor formulæ $\int (ax - yy) y\,dx$ fiet pariter $= o$, pro Parabola autem idem valor erit affirmativus, ideoque $> o$; ex quo sequitur in Parabola formulæ propositæ valorem non esse minimum, sed maximum. Poterimus autem algebraïce indicare quantus futurus sit valor formulæ propositæ pro Parabola: cum enim sit $yy = \frac{1}{7} ax$, abibit formula proposita in hanc $\int \frac{1}{7} ax\,dx \sqrt{\frac{1}{7} ax} = \frac{4}{15} ax^2 \sqrt{\frac{1}{7} ax}$. Quod si autem ponamus aliam æquationem, puta $y = nx$; abibit formula proposita in hanc $\int dx (nax - n^3x^3) = \frac{1}{3} nax^3 - \frac{1}{4} n^3x^4$, quæ semper est minor quam valor formulæ qui pro Parabola inventa prodiit: id quod quilibet facile, substituendis loco x definitis valoribus, experietur.

Exemplum III.

18. *Invenire curvam, in qua sit, inter omnes omnino curvas ad eandem abscissam relatas, valor hujus formulæ* $\int (15a^2x^2y - 15a^3xy + 5a^2y^3 - 3y^5)\,dx$ *maximus vel minimus.*

Erit igitur $Z = 15a^2x^2y - 15a^3xy + 5a^2y^3 - 3y^5$, qui si differentietur, posito x constante, prodibit $N\,dy = 15a^2x^2\,dy - 15a^3x\,dy + 15a^2y^2\,dy - 15y^4\,dy$; hincque $N = 15(a^2x^2 - a^3x + a^2y^2 - y^4)$; qui valor, positus $= o$, dabit æquationem pro curva quæsita: erit itaque $aaxx - a^3x + a^2y^2 - y^4 = o = (ax - yy)(ax + yy - aa)$. Ob binos hos factores, prodeunt binæ curvæ satisfacientes, quarum altera exprimetur hac æquatione $yy = ax$, altera hac $yy = aa - ax$; utraque pro Parabola. Ut nunc appareat utra sit pro maximo vel minimo, ponamus abscissam esse minimam, ac prior æquatio $yy = ax$ in formula substituta dabit $\int - 10a^3x\,dx \sqrt{ax}$. Altera vero formula $yy = aa - ax$, seu $y = a$, substituta dabit $\int 2a^5\,dx$. Quod si autem ipsi y alius quicunque valor tribuatur, puta $y = o$; tum formula proposita abit in $\int o\,dx = o$. Ex quo patet curvarum inventarum alteram $yy = aa - ax$ esse pro maximo, alteram autem $yy = ax$ pro minimo, scilicet pro maximo negativo.

Digitized by Google

tivo. Facillime autem perpetuo hæc dijudicatio, utrum maximum an minimum in curva inventa locum habeat, inſtituetur, ſi abſciſſa x ponatur infinite parva; tum enim integratione non erit opus, ſed ipſa formula $Z\,dx$ monſtrabit valorem formulæ $\int Z\,dx$ hoc caſu.

EXEMPLUM IV.

19. *Inter omnes curvas eidem abſciſſæ reſpondentes, definire eam in qua ſit formula* $\int (3ax - 3xx - yy)(ax - xx - \frac{4}{3}xy + yy)\,dx$ *valor maximus vel minimus.*

Ex hac igitur formula prodibit ſequens ipſius Z valor evolutus;

$$Z = \begin{array}{l} +3a^2x^2 - 4ax^2y + 2axyy + \frac{4}{3}xy^3 - y^4 \\ -6ax^3 + 4x^3y - 2xxyy \\ +3x^4 \end{array}$$

quæ differentiata, poſito x conſtante, ac diviſa per dy, ſequentem præbebit valorem pro N:

$$N = \begin{array}{l} -4ax^2 + 4axy + 4xyy - 4y^3 \\ +4x^3 - 4xxy \end{array}$$

quæ expreſſio, nihilo æqualis poſita, dabit æquationem pro curva quæſita. Erit itaque

$$\begin{array}{l} y^3 - xyy + xxy + axx = 0 \\ \qquad - axy - x^3 \end{array}$$

quæ duos habet factores, qui totidem præbent æquationes, haſce

I. $y - x = 0$, pro linea recta
II. $yy - ax + xx = 0$, pro circulo.

Ponatur x infinite parva, eritque ex æquatione $y = x$, valor ipſius $Z = 3a^2x^2$; at ex æquatione $yy = ax - xx$, ſeu $y = \sqrt{ax}$, erit $Z = 4aaxx$. Quod ſi autem ponatur $y = a$, prodit $Z = -a^4$, unde apparet utramque lineam inventam eſſe pro maximo.

SCHOLION

20. Problemata etiam resolvi possunt per Methodum maximorum & minimorum vulgarem. Quando enim curva quæritur pro qua valor ipsius $\int Z\,dx$ sit maximus vel minimus, idque pro qualibet abscissa; manifestum est siquidem Z sit functio determinata ipsarum x & y, formulam $\int Z\,dx$ maximum minimumve esse non posse, nisi elementum ejus $Z\,dx$ ac proinde ipsum Z tale sit. Quamobrem quæstioni satisfiet, si quantitas Z differentietur posito x constante, ejusque differentiale ponatur $= 0$. Tum enim perpetuo Z habebit valorem maximum vel minimum, ac proinde etiam $Z\,dx$ & ipsa formula $\int Z\,dx$. Quod si autem functio Z differentietur, posito x constante, prodibit $N\,dy$; quoniam generaliter differentiando posuimus $dZ = M\,dx + N\,dy$; satisfietque ponendo $N = 0$: quæ est eadem solutio, quam per Methodum traditam invenimus. Quamvis autem hinc videantur istæ quæstiones simili modo resolvi posse, quo in Methodo maximorum & minimorum vulgari; tamen hoc tantum evenit, si Z fuerit functio ipsarum x & y tantum; namque si in Z præterea insint quantitates ex differentialibus ortæ p, q, r, &c: tum vulgaris Methodus nullius amplius usus esse potest. Etsi enim tum differentietur functio Z posito x constante, tamen in differentiale etiam ingrederentur differentialia dp, dq, dr, &c. quorum relatio ad dy cum non constet, æquatio inde ad maximum minimumve determinandum apta deduci non poterit. His igitur casibus utilitas & necessitas nostræ Methodi maxime cernetur.

PROPOSITIO III. PROBLEMA.

Fig. 4. 21. *Si* Z *fuerit functio ipsarum* x, y, *&* p *determinata, ita ut sit* $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$; *invenire, inter omnes curvas eidem abscissæ respondentes, eam in qua sit* $\int Z\,dx$ *maximum vel minimum.*

SOLUTIO.

Digitized by Google

SOLUTIO.

Sit a m z curva quæſito ſatisfaciens, atque concipiatur applicata quæcunque N n $= y'$ augeri particula n ν, debebit valor differentialis formulæ $\int Z\,dx$, ſeu quantitatis huic æquivalentis, puta $Z\,dx + Z'\,dx + Z''\,dx + Z'''\,dx +$ &c. una cum $Z_{,}\,dx + Z_{,,}\,dx + Z_{,,,}\,dx +$ &c. eſſe $= 0$. Totius igitur quantitatis $\int Z\,dx$ valor differentialis ex translatione puncti n in ν habebitur, ſi ſingulorum illorum terminorum, qui quidem hac translatione afficiuntur, valores differentiales quærantur & in unam ſummam addantur. Ex translatione autem puncti n in ν, illi tantum termini mutationem ſubeunt, in quibus inſunt quantitates y', p & p'; ideoque tantum termini $Z\,dx$ & $Z'\,dx$; nam uti Z eſt functio ipſarum y & p præter x; ita Z' ſimilis eſt functio ipſarum y' & p'. Quamobrem hi termini debebunt differentiari, atque in eorum differentialibus loco dy', dp, & dp' ſcribi oportet valores ſupra indicatos $+ n\nu$; $+\frac{n\nu}{dx}$ & $-\frac{n\nu}{dx}$. Sicut autem eſt $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$, ita erit $dZ' = M'dx + N'dy' + P'\,dp'$. Hinc itaque valor differentialis ipſius Z erit $P.\frac{n\nu}{dx}$, & ipſius Z' erit $N.\,n\nu - P'.\frac{n\nu}{dx}$; ex quo utriuſque termini $Z\,dx + Z'\,dx$, ideoque integræ formulæ $\int Z\,dx$ valor differentialis erit $= n\nu.\,(P + N'dx - P')$. At eſt $P' - P = dP$, & loco N' ſcribi poteſt N; unde valor differentialis erit $= n\nu.\,(N\,dx - dP)$. Quare cum formulæ $\int Z\,dx$ valor differentialis nihilo æqualis factus præbeat æquationem pro curva quæſita, hæc erit $0 = N\,dx - dP$, vel $N - \frac{dP}{dx} = 0$, qua æquatione natura curvæ quæſitæ exprimetur. *Q. E. I.*

COROLL. I.

22. Quod ſi ergo fuerit Z functio quæcunque ipſarum x, y, itemque earum differentialium dx & dy, ſeu loco horum differentialium,

ipſius p; exiſtente $dy = p\,dx$; differentiale ipſius Z hujuſmodi habebit formam, ut ſit $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$. Atque hinc reperietur curva, in qua ſit $\int Z\,dx$ maximum vel minimum, formando hanc æquationem $N - \frac{dP}{dx} = 0$ ſeu $N\,dx = dP$.

Coroll. II.

23. Æquatio hæc igitur ſemper erit differentialis ſecundi gradus, niſi in P plane non inſit p. Nam ſi p continetur in P, tum in dP inerit dp; quod ob $p = \frac{dy}{dx}$ differentialia ſecundi gradus involvet.

Coroll. III.

24. Quando ergo in differentiali ipſius $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$ quantitas P adhuc in ſe complectitur p; tum, ob æquationem pro curva quæſita differentialem ſecundi gradus, duæ novæ conſtantes arbitrariæ per integrationem ingredientur. Ex quo ad harum conſtantium determinationem, duo curvæ puncta præſcribi poterunt; alias enim non una ſed innumerabiles curvæ reperirentur.

Coroll. IV.

25. Ut itaque hujuſmodi Problemata determinate proponantur, ita ſunt enuncianda, ut per data duo puncta curva duci debeat, quæ, inter omnes alias curvas per eadem puncta ductas, pro eadem abſciſſa x valorem $\int Z\,dx$ maximum minimumve complectatur.

Coroll. V.

26. In P autem quantitas p non inerit, ſi Z fuerit functio ipſarum x & y tantum, per p vel per $n + p$, denotante n numerum

rum conſtantem, multiplicata. Sit enim V functio ipſarum x & y tantum; ita ut ſit $dV = M\,dx + N\,dy$; atque $Z = V(n+p)$, erit $dZ = (n+p)\,M\,dx + (n+p)\,N\,dy + V\,dp$. Hinc-que æquatio pro curva quæſita erit $o = (n+p)\,N - \frac{dV}{dx}$, ſeu $(n+p)\,N\,dx = dV = M\,dx + N\,dy$.

Coroll. VI.

27. His igitur caſibus, quibus eſt $Z = V(n+p)$, exiſtente V functione ipſarum x & y tantum, non pervenitur ad æquationem differentialem ſecundi gradus: quia dp in ea prorſus non ineſt. Verum nequidem ad differentialem æquationem primi gradus pervenitur; ſed adeo ad algebraïcam. Nam cum ſit $p\,dx = dy$, erit $(n+p)\,N\,dx = n\,N\,dx + N\,dy$; quod ipſi $M\,dx + N\,dy$ æquale poſitum, dabit æquationem per dx diviſibilem, adeoque algebraïcam, hanc $n\,N = M$, ſiquidem V fuerit functio algebraïca.

Coroll. VII.

28. Quoties autem hoc evenit, maximi minimive formula, quæ eſt $\int Z\,dx$, erit talis formæ, $\int (V\,n\,dx + V\,dy)$, vel poſito $n = o$, talis $\int V\,dy$. Hujuſmodi igitur maximi minimive formulæ pariter ad æquationem determinatam pro curva quæſita deducunt, ita ut non liceat unum plurave puncta præſcribere, per quæ curva tranſire debeat.

Coroll. VIII.

29. Poſita igitur V functione ipſarum x & y, iſta maximi minimive formula $\int V\,dy$ pari modo tractatur, quò $\int V\,dx$. Nam, poſito $dV = M\,dx + N\,dy$, formulæ $\int V\,dx$ reſpondet æquatio pro curva hæc $N = o$, ita alteri formulæ $\int V\,dy$ reſpondet æquatio $M = o$. Ex quo perſpicuum eſt coordinatas x & y inter ſe commutari poſſe.

SCHOLION I.

30. Apparet itaque in ſolutione hujuſmodi Problematum, quibus quæritur curva valorem formulæ $\int Z\,dx$ maximum minimumve habens, exiſtente Z functione ipſarum x, y, & p, perveniri ad æquationem differentialem ſecundi gradus, niſi in Z quantitas p unicam tantum habeat dimenſionem. Sæpe numero autem iſta æquatio differentialis ſecundi gradus integrationem admittit, de quo in ſingulis caſibus erit videndum. Interim hîc annotaſſe juvabit, generaliter integrationem ſuccedere, ſi in functione Z omnino non inſit x, hoc eſt, ſi in ejus differentiali $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$ valor M evaneſcat, ita ut ſit tantum $dZ = N\,dy + P\,dp$. Cum enim pro curva inventa ſit hæc æquatio $N - \frac{dP}{dx} = 0$; multiplicetur ea per dy, & quia eſt $dy = p\,dx$, ea abibit in hanc $N\,dy - p\,dP = 0$, cui æquivalet iſta $N\,dy + P\,dp = P\,dp + p\,dP = dZ$, cujus integrale eſt $Z + C = Pp$, quæ æquatio jam tantum eſt differentialis primi gradus. Quoties ergo inter omnes curvas eidem abſciſſæ reſpondentes ea quæritur, in qua ſit valor formulæ $\int Z\,dx$ maximus vel minimus, atque Z tantum ſit functio ipſarum y & p, ita ut ſit $dZ = N\,dy + P\,dp$; tum, pro curva ſatisfaciente, ſtatim exhiberi poterit æquatio differentialis primi gradus iſta $Z + C = Pp$. Deinde vero etiam, ſi Z fuerit functio ipſarum x & p tantum, atque $dZ = M\,dx + P\,dp$, evaneſcente termino $N\,dy$, tum pro curva prodibit æquatio differentialis primi gradus. Nam, ob $dP = 0$, erit $P = C$, quæ pro curva quæſita dabit æquationem differentialem primi gradus tantum. Quod ſi autem inſuper M evaneſcat, ſeu Z functio ſit ipſius p tantum, & $dZ = P\,dp$; æquatio inventa $P = C$ tranſmutabitur in iſtam $P\,dp = C\,dp = dZ$, quæ denuo integrata dat $Z + D = Cp$. Hoc autem caſu, quia Z & P ſunt functiones ipſius p tantum, utraque æquatio $P = C$ & $Z + D = Cp$, præbebit pro p valorem conſtantem; ideoque æquationem hujus formæ $dy = n\,dx$, quæ indicat hujuſmodi Problematis ſatisfacere

cere lineas rectas, & quidem quaſcunque utlibet ductas. Nam in æquatione $P = C$, cum C ſit conſtans arbitraria, valor ipſius p non ſolum conſtans, ſed etiam arbitrarius evadet; ex quo linea recta quæcunque reſultabit. Quamobrem ſi per data duo puncta curva duci debeat, in qua ſit $\int Z\,dx$ maximum vel minimum, ac Z ſit functio ipſius p tantum, tum ſatisfaciet linea recta per illa data duo puncta ducta.

SCHOLION II.

31. Quoniam ſupra jam vidimus in hujuſmodi Problematis coordinatas x & y inter ſe commutari, atque, ſi commodum videatur, applicatam y tanquam abſciſſam tractari poſſe, idem hoc quoque caſu confirmari juvabit. Sit igitur curva inveſtiganda in qua ſit $\int Z\,dy$ maximum vel minimum, exiſtente Z functione ipſarum x, y & p, & $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$. Hæc autem formula $\int Z\,dy$ ad noſtram formam reducta abit in $\int Zp\,dx$: in qua erit $d.Zp = Mp\,dx + Np\,dy + (Z + Pp)\,dp$: ex qua formulæ propoſitæ valor differentialis reſpondens erit $(Np\,dx - d^2 - P\,dp - p\,dP)\,nn = (-M\,dx - 2P\,dp - p\,dP)\,nn$: & æquatio pro curva quæſita erit $0 = -M\,dx - 2P\,dp - p\,dP$; ſeu $0 = -M\,dy - d.Pp^2$. Quod ſi nunc ad ſimilitudinem oſtendendam, quia hîc y tanquam abſciſſam conſideramus, ponamus $dx = \pi\,dy$, erit $p = \frac{1}{\pi}$ & $dp = -\frac{d\pi}{\pi\pi} = -p\,p\,d\pi$; erit $dZ = M\,dx + N\,dy - P\,p\,p\,d\pi = M\,dx + N\,dy + \Pi\,d\pi$, ponendo $\Pi = -P\,p\,p$; ut ſimilitudo terminorum conſervetur. Quapropter æquatio pro curva erit $0 = -M\,dy + d\Pi$; quæ eadem æquatio prodiiſſet, ſi in formula $\int Z\,dy$, applicata y in abſciſſam & viciſſim abſciſſa in applicatam tranſmutetur. Propoſita igitur quacunque formula indeterminata ex x & y horumque differentialibus compoſita, quæ debeat eſſe maxima vel minima; coordinatarum x & y utramlibet licebit tanquam abſciſſam tractare, ad eamque maximum minimumve accommodare.

EXEM-

EXEMPLUM I.

32. *Inter omnes curvas ad eandem abſciſſam relatas, eam determinare, in qua ſit* $\int(Z\,dx + [Z]\,dy)$ *maximum vel minimum; exiſtentibus* Z *&* $[Z]$ *functionibus quibuſcunque ipſarum* x *&* y*, ita ut ſit* $dZ = M\,dx + N\,dy$ *&* $d[Z] = [M]\,dx + [N]\,dy$.

Ut formula haec $\int(Z\,dx + [Z]\,dy)$ ad formam receptam reducatur, ponatur $p\,dx$ loco dy; habebiturque haec formula $\int(Z + [Z]p)\,dx$ maxima minimave efficienda. Differentietur ergo valor $Z + [Z]p$; eritque ejus differentiale $= +M\,dx + N\,dy + [M]p\,dx + [N]p\,dy + [Z]\,dp$.

Jam per regulam inventam, hinc pro curva quaeſita iſta prodibit aequatio, $0 = (N + [N]p)\,dx - d[Z] = (N + [N]p)\,dx - [M]\,dx - [N]\,dy$: quae, ob $[N]p\,dx = [N]\,dy$, per dx diviſa dabit hanc aequationem pro curva quaeſita algebraicam ſeu finitam $N - [M] = 0$. ſeu $N = [M]$. Hinc intelligitur ſi formula propoſita $\int(Z\,dx + [Z]\,dy)$ fuerit determinata, ſeu differentiale $Z\,dx + [Z]\,dy$ ita comparatum, ut integrationem admittat; tum nullam lineam quaeſito eſſe ſatisfacturam, ſeu potius omnes lineas aeque ſatisfacere. Nam ſi $Z\,dx + [Z]\,dy$ integrationem admittit, per ſe erit $N = [M]$; uti alibi de formulis differentialibus duarum variabilium determinatis demonſtravimus; idcoque his caſibus prodit aequatio identica $0 = 0$. Hincque luculenter intelligitur, quod jam ante notavimus, maximi minimive formulam oportere eſſe formulam indeterminatam; alioquin enim omnes lineae curvae aeque ſatisfacerent.

EXEMPLUM II.

33. *Inter omnes lineas ad eandem abſciſſam relatas, determinare eam, cujus longitudo ſit minima; ſeu in qua ſit* $\int dx\sqrt{(1 + pp)}$ *minimum.*

Primum quidem apparet in hac quaeſtione maximum non dari,

Digitized by Google

ri, cum linearum longitudo in infinitum augeri queat, manente abſciſſa eadem. Ita minimum tantum habebit locum, id quod ex ipſa Geometria elementari conſtat, in qua demonſtratur lineam rectam inter omnes alias lineas intra eoſdem terminos ſitas eſſe breviſſimam. Hoc igitur Exemplum ideo attuliſſe viſum eſt, cum ut conſenſus noſtræ Methodi cum veritate aliunde jam cognita intelligatur, tum etiam ut circumſtantia de duobus punctis arbitrariis, quæ ad hujus generis quæſtiones addi debet, melius percipiatur. Erit igitur, formula $\int dx \sqrt{(1+pp)}$ cum generali $\int Z\,dx$ comparata, $Z = \sqrt{(1+pp)}$, & $dZ = \frac{p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$; unde fit $M = 0$, $N = 0$, & $P = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quare, cum in genere æquatio pro linea quæſita ſit $N - \frac{dP}{dx} = 0$, habebimus hoc caſu $dP = 0$; ideoque $P = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = Conſt.$ ex qua æquatione oritur $p = Conſt. = n$, ſeu $dy = n\,dx$, quæ denuo integrata dat $y = a + nx$. Non ſolum ergo patet lineam quæſitam eſſe rectam, ſed etiam, ob duas arbitrarias conſtantes a & n, rectam utcunque ductam. Quare ſi per data duo puncta linea duci jubeatur breviſſima, erit illa recta. Similiter autem intelligitur, ſi linea debeat inveniri, in qua ſit $\int Z\,dx$, ubi Z eſt functio ipſius p tantum, maximum vel minimum, tum lineam rectam tantum ſatisfacere; uti ante jam notavimus.

EXEMPLUM III.

34. *Inter omnes curvas ad eandem abſciſſam relatas, determinare eam, in qua ſit* $\int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{x}}$ *maximum vel minimum.*

Hæc formula oritur, ſi quæratur linea celerrimi deſcenſus; in hypotheſi gravitatis uniformis, ponendo axem in quo abſciſſæ capiuntur verticalem. Erit igitur $Z = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{x}}$ & dZ

$= \frac{-dx\sqrt{(1+pp)}}{2x\sqrt{x}} + \frac{p\,dp}{\sqrt{x(1+pp)}}$; unde fit $M = \frac{-\sqrt{(1+pp)}}{2x\sqrt{x}}$, $N = 0$, & $P = \frac{p}{\sqrt{x(1+pp)}}$. Cum jam curva quæſita exprimatur æquatione $N - \frac{dP}{dx} = 0$; erit $dP = 0$, & $P\ (= \frac{p}{\sqrt{x(1+pp)}}) = Conſt. = \frac{1}{\sqrt{a}}$; quæ reducta præbet $ap^2 = x + p^2x$, & $p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, ſeu $y = \int dx\,\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, quæ æquatio indicat, curvam quæſitam eſſe Cycloidem ſuper baſi horizontali natam, & cuſpidem in ſuprema axis regione habentem: quæ adeo per data duo quæcunque puncta duci poterit.

EXEMPLUM IV.

35. *Inter omnes curvas eidem abſciſſæ reſpondentes, eam determinare in qua ſit* $\int y^n\,dx\sqrt{(1+pp)}$ *maximum vel minimum.*

Pro hac ergo formula propoſita erit $Z = y^n\sqrt{(1+pp)}$ & $dZ = ny^{n-1}\,dy\sqrt{(1+pp)} + \frac{y^n p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$; ita ut fiat $M = 0$, & $N = ny^{n-1}\sqrt{(1+pp)}$ atque $P = \frac{y^n p}{\sqrt{(1+pp)}}$.

Quoniam igitur eſt $M = 0$; ſtatim pro curva quæſita habebitur iſta æquatio ſemel jam integrata $Z + C = Pp$ (30), quæ noſtro caſu fit $y^n\sqrt{(1+pp)} + ma^n = \frac{y^n pp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quod ſi ponatur conſtans $a = 0$, prodibit $1+pp = pp$, ſeu $p = \infty$, ſatisfacietque linea recta normalis ad axem. Generatim vero lineæ ſatisfacientes reperientur ex æquatione, quæ abit in $y^n + ma^n\sqrt{(1+pp)} = 0$, ſeu $y^{2n} = m^2a^{2n} + m^2a^{2n}p^2$; quæ dat $p\ (= \frac{dy}{dx}) = \frac{\sqrt{(y^{2n} - m^2a^{2n})}}{ma^n}$, & $x = \int \frac{ma^n\,dy}{\sqrt{(y^{2n} - m^2a^{2n})}}$; quæ

quæ linea per data duo puncta duci poteſt. Si fuerit $n = -\frac{1}{2}$, ita ut $\int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}$ debeat eſſe maximum vel minimum; pariter prodire debet linea brachyſtochrona ad axem horizontalem relata; eritque pro ea $x = \int dy \sqrt{\frac{y}{a-y}}$; quæ cum præcedente omnino congruit, dummodo coordinatæ x & y inter ſe commutentur. Erit ſcilicet, ut ante, curva ſatisfaciens Cyclois ſuper baſi horizontali rotando generata, qualem per data duo quæcunque puncta ducere licet.

EXEMPLUM V.

36. Inter omnes curvas eidem abſciſſæ reſpondentes eam determinare, in qua ſit $\frac{\int y dy^3}{dx^2+dy^2}$ *maximum vel minimum*

Formula hæc ad formam conſuetam, ope ſubſtitutionis $dy = pdx$, reducta, abit in hanc $\int \frac{yp^3 dx}{1+pp}$; eaque reperiri ſolet, ſi quæratur ſolidum rotundum rotatione curvæ circa axem ortum, quod ſecundum axis directionem in fluido motum minimam patiatur reſiſtentiam: reſiſtentia namque hoc caſu proportionalis cenſetur formulæ $\int \frac{y dy^3}{dx^2+dy^2}$ ſeu $\int \frac{yp^3 dx}{1+pp}$. Erit ergo $Z = \frac{yp^3}{1+pp}$ & $dZ = \frac{p^3 dy}{1+pp} + \frac{y dp(3pp+p^4)}{(1+pp)^2}$; ita ut fiat $M = 0$, $N = \frac{p^3}{1+pp}$ & $P = \frac{p^2 y(3+pp)}{(1+pp)^2}$. Cum igitur ſit $M = 0$; una integratio generaliter ſuccedit, eritque æquatio pro curva quæſita $Z + C = Pp$, ſeu $\frac{yp^3}{1+pp} + a = \frac{p^3 y(3+pp)}{(1+pp)^2}$; quæ abit in hanc $a(1+pp)^2 = 2p^3 y$. Hujus æquationis autem evolutio non ita poteſt inſtitui ut eliminetur p; quare conveniet utramque coordinatam y & x per eandem variabilem p definiri. Ac primo quidem eſt $y = \frac{a(1+pp)^2}{2p^3}$. Deinde, ob $dy = pdx$;

Digitized by Google

erit $dx = \frac{dy}{p}$ & $x = \int \frac{dy}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{y\,dp}{pp}$. Quod ſi ergo loco y valor inventus ſubſtituatur, prodibit $x = \frac{a(1+pp)^2}{2p^4} + a\int \frac{dp(1+pp)^2}{2p^5} = \frac{a}{2}\left(\frac{3}{4p^4} + \frac{1}{pp} + 1 + lp\right)$: ex quibus curvæ conſtructio poterit confici, logarithmis in ſubſidium vocandis.

EXEMPLUM VI.

37. *Invenire curvam, in qua iſta formula* $\int y\,x\,dx\sqrt{(1+pp)}$ *ſit maximum minimumve.*

Erit ergo $Z = yx\sqrt{(1+pp)}$, atque $dZ = y\,dx\sqrt{(1+pp)} + x\,dy\sqrt{(1+pp)} + \frac{yxp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Hanc ob rem habebitur $M = y\sqrt{(1+pp)}$, $N = x\sqrt{(1+pp)}$ & $P = \frac{yxp}{\sqrt{(1+pp)}}$; unde æquatio pro curva formabitur hæc $N\,dx = dP$, quæ ſuggerit $x\,dx\sqrt{(1+pp)} = \frac{p^2x\,dx + yp\,dx}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{yx\,dp}{(1+pp)^{3:2}}$, ſeu $x\,dx - y\,dy = \frac{yx\,dp}{1+pp}$, ob $dy = p\,dx$. Hæc eſt æquatio differentialis ſecundi gradus, & quanquam, ope idonearum ſubſtitutionum ea ad formam ſimpliciter differentialem reduci poteſt, eo quod variabiles x & y ubique eundem dimenſionum numerum conſtituunt; tamen æquatio iſta differentialis ita eſt comparata, ut neque integrari neque ſeparari poſſit; deduci ſcilicet poteſt ad æquationem hujus formæ $\frac{du}{u^3} + \frac{dv}{v^3} = \frac{v\,dv(1+u^3)}{u^3}$. Quod cum ita ſit, neque æquatio inventa $x\,dx - y\,dy = \frac{yx\,dp}{1+pp}$ ad formam vel ſimpliorem vel commodiorem revocari poteſt; hincque nihil admodum de natura curvæ inventæ judicare licet. Interim tamen illa æquatio potentiâ duas arbitrarias conſtantes involvit, ex quo curva ſatisfaciens per bina puncta data duci poteſt.

EXEM-

Digitized by Google

EXEMPLUM VII.

38. *Invenire curvam, in qua sit* $\int (xx+yy)^n dx \sqrt{(1+pp)}$ *maximum vel minimum.*

Cum hîc sit $Z = (xx+yy)^n \sqrt{(1+pp)}$, erit $dZ = 2n(xx+yy)^{n-1}(x\,dx+y\,dy)\sqrt{(1+pp)} + \frac{(xx+yy)^n p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$, ergo $N = 2n(xx+yy)^{n-1} y\sqrt{(1+pp)}$ & $P = \frac{(xx+yy)^n p}{\sqrt{(1+pp)}}$; ex quo pro curva quæsita ista habebitur æquatio $2n(xx+yy)^{n-1} y\,dx\sqrt{(1+pp)} = d\,\frac{(xx+yy)^n p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{2n(xx+yy)^{n-1} p(x\,dx+y\,dy)}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{dp(xx+yy)^n}{(1+pp)^{3:2}}$, quæ per $(xx+yy)^{n-1}$ divisa, ac per $\sqrt{(1+pp)}$ multiplicata, abit in $2nydx = 2nx\,dy + \frac{(xx+yy)\,dp}{1+pp}$ seu $\frac{2n(y\,dx-x\,dy)}{xx+yy} = \frac{dp}{1+pp}$. Hujus æquationis utrumque membrum integrabile est per quadraturam circuli, sitque integrale $2n$ A tang. $\frac{x}{y}$ = A tang. p + A tang. k = A tang. $\frac{p+k}{1-pk}$: unde fiet $\frac{x}{y} = \text{tang.}\,\frac{1}{2n}\,\text{A tang.}\,\frac{k+p}{1-kp} = T$; eritque T functio algebraïca ipsius p, dummodo sit $2n$ numerus rationalis. Cum ergo sit $x = Ty$, seu $y = \frac{x}{T}$, erit $dy = p\,dx = \frac{dx}{T} - \frac{x\,dT}{TT}$, sive $x\,dT = T\,dx - p\,T\,T\,dx$; ideoque $\frac{dx}{x} = \frac{dT}{T-pTT} + \frac{T\,dp}{1-pT} - \frac{T\,dp}{1-pT}$; unde prodit $lx = l\frac{T}{1-pT} - \int \frac{T\,dp}{1-pT}$, quæ quidem ad constituendam curvam abunde satisfaciunt. Verum ut harum curvarum, quæ pro definitis exponentis n valoribus prodeunt, natura melius cognoscatur, Casus nonnullos contemplabimur.

I. Sit $n = \frac{1}{2}$, & $2n = 1$; erit Atang. $\frac{x}{y}$ = A tang. $\frac{k+p}{1-kp}$; ideo-

ideoque $\frac{x}{y} = \frac{k+p}{1-kp} = \frac{kdx+dy}{dx-kdy}$, seu $xdx - kxdy = kydx + ydy$; quæ integrata præbet $x^2 - y^2 = 2kxy + C$; quæ est æquatio pro Hyperbola æquilatera.

II. Sit $n = 1$, & $2n = 2$; erit $2A$ tang. $\frac{x}{y} = A$ tang. $\frac{k+p}{1-kp}$, seu A tang. $\frac{2xy}{yy-xx} = A$ tang. $\frac{k+p}{1-kp}$; unde fit $\frac{2xy}{yy-xx} = \frac{kdx+dy}{dx-kdy}$, seu $2xydx - 2kxydy = kyydx - kxxdx + yydy - xxdy$; quæ integrata dat $yx^2 = ky^2x - \frac{1}{3}kx^3 + \frac{1}{3}y^3 + C$, sive $y^3 + 3ky^2x - 3yx^2 - kx^3 = C$.

III. Sit $n = \frac{3}{2}$, seu $2n = 3$; erit $3A$ tang. $\frac{x}{y} = A$ tang. $\frac{3y^2x - x^3}{y^3 - 3yx^2} = A$ tang. $\frac{kdx+dy}{dx-kdy}$; hincque $3y^2xdx - 3ky^2xdy - x^3dx + kx^3dy = ky^3dx + y^3dy - 3kyx^2dx - 3yx^2dy$; quæ integrata dat $\frac{3}{2}y^2x^2 - ky^3x - \frac{1}{4}x^4 + kyx^3 - \frac{1}{4}y^4 = C$, seu $y^4 + 4ky^3x - 6y^2x^2 - 4kyx^3 + x^4 = C$.

Ex his jam casibus colligi poterit æquatio integralis pro valore quocunque ipsius n. Cum enim sit $2n$ A tang. $\frac{x}{y} = A$ tang. $\frac{2ny^{2n-1}x - \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.\ 2.\ 3.}y^{2n-3}x^3 + \text{&c.}}{y^{2n} - \frac{2n(2n-1)}{1.\ 2.}y^{2n-2}x^2 + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}y^{2n-4}x^4 - \text{&c.}}$

$= \frac{(y+x\sqrt{-1})^{2n} - (y-x\sqrt{-1})^{2n}}{(y+x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} + (y-x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1}}$; fiet $\frac{kdx+dy}{dx-kdy}$

$\frac{(y+x\sqrt{-1})^{2n} - (y-x\sqrt{-1})^{2n}}{(y+x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} + (y-x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1}}$; quæ reducta præbet $kdx(y+x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} + kdx(y-x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1}$

$+ kdy(y+x\sqrt{-1})^{2n} - kdy(y-x\sqrt{-1})^{2n}$

$= dy(y+x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1} + dy(y-x\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1}$

$- dx(y+x\sqrt{-1})^{2n} + dx(y-x\sqrt{-1})^{2n}$ cujus integrale est

Digitized by

eſt $k(y+x\sqrt{-1})^{2n+1} - k(y-x\sqrt{-1})^{2n+1} = -\frac{1}{\sqrt{-1}}(y+x\sqrt{-1})^{2n+1} - \frac{1}{\sqrt{-1}}(y-x\sqrt{-1})^{2n+1} + C$, ſeu $C = (y+x\sqrt{-1})^{2n+1}(k\sqrt{-1}+1) + (y-x\sqrt{-1})^{2n+1}(1-k\sqrt{-1})$. At eſt generaliter $(y+x\sqrt{-1})^{2n+1} + (y-x\sqrt{-1})^{2n+1} = 2(yy+xx)^{(2n+1):2}$ cof. $2n$ A tang. $\frac{x}{y}$, atque . . . . . $\frac{(y+x\sqrt{-1})^{2n+1} - (y-x\sqrt{-1})^{2n+1}}{\sqrt{-1}} = 2(yy+xx)^{(2n+1):2}$ ſin. $2n$ A tang. $\frac{x}{y}$. Quibus valoribus ſubſtitutis, prodibit æquatio integralis ab imaginariis libera hæc $2k(yy+xx)^{(2n+1):2}$ ſin. $2n$ A tang. $\frac{x}{y} = 2(yy+xx)^{(2n+1):2}$ cof. $2n$ A tang. $\frac{x}{y} + C$: vel, ob conſtantes arbitrarias k & C, iſta $C = (yy+xx)^{(2n+1):2}(k$ ſin. $2n$ A tang. $\frac{x}{y} + h$ cof. $2n$ A tang. $\frac{x}{y})$, quæ æquatio ſemper eſt algebraïca, dummodo fuerit n numerus rationalis. Vel ſi arcus quidam circularis arbitrarius ponatur $= g$, curva quæſita hujuſmodi æquatione $C = (yy+xx)^{(2n+1):2}$ ſin $(g + 2n$ A tang. $\frac{x}{y})$ exprimi poteſt; poſito radio circuli, quem hic contemplamur, $= 1$.

SCHOLION III.

39. Si ergo, inter omnes curvas eidem abſciſſæ reſpondentes, ea debeat inveniri, in qua ſit $\int Z\,dx$ maximum vel minimum, exiſtente Z functione ipſarum x, y & p, ita ut ſit $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$; pro curva quæſita iſta habebitur æquatio

$N -$

$N - \frac{dP}{dx} = 0$. Quoniam autem in Problemate præcedente, annotavimus, si Z tantum fuerit functio ipsarum x & y, tum Methodo vulgari solutionem absolvi posse: nam ut $\int Z\,dx$ sit maximum minimumve, etiam $Z\,dx$, ac proinde Z tale esse oportet, respectu ad x habito; & hanc ob rem differentiale ipsius dZ, sumto x constante, nihilo æquale positum dabit æquationem pro curva quæsita. Similis Methodus succederet in præsente Problemate, si modo in differentiali ipsius Z, quod oritur posito x constante, atque est $N\,dy + P\,dp$, relatio inter differentialia dy & dp pateret, ut per dy divisio institui, atque valor finitus nihilo æquandus erui posset. Cum autem istam relationem inter dy & dp, sine qua Methodus maximorum & minimorum vulgaris adhiberi nequit, a priori definire etiamnum non liceat, poterimus eam a posteriori assignare: Quia enim inventa est æquatio pro curva quæsita hæc $N - \frac{dP}{dx} = 0$; intelligitur, hanc ex illa $N\,dy + P\,dp$, seu $N + \frac{P\,dp}{dy}$ oriri potuisse, si constitisset esse $-\frac{dP}{dx} = \frac{P\,dp}{dy}$, seu $0 = dP + \frac{P\,dp}{p}$; ob $dy = p\,dx$. Quocirca relatio illa inter differentialia dy & dp ita erit comparata, ut continetur æquatione $p\,dP + P\,dp = 0$; quæ proprietas ad hanc redit ut considerari debeat Pp tanquam constans. Hinc ad Problemata resolvenda, in quibus curva quæritur habens valorem formulæ $\int Z\,dx$ maximum vel minimum, existente $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$; valor ipsius Z debet differentiari, atque in differentiali $M\,dx + N\,dy + P\,dp$, loco $M\,dx$ poni debeat 0, $N\,dy$ immutatum relinqui, tum vero loco $P\,dp$ scribi $-p\,dP$; & id quod emergit nihilo æquale poni. Hoc enim pacto obtinebitur $N\,dy - p\,dP = 0$; quæ æquatio, ob $dy = p\,dx$, transit in hanc $N - \frac{dP}{dx} = 0$, quæ est ea ipsa quam invenimus. Desideratur itaque Methodus a resolutione geometrica & lineari libera, qua pateat in tali investigatione maximi minimive loco $P\,dp$ scribi debere $-p\,dP$.

PRO-

PROPOSITIO IV. PROBLEMA.

40. *Si* Z *fuerit functio ipſarum* x, y, p *&* q, *ita ut ſit* $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq$; *invenire, inter omnes curvas eidem abſciſſæ reſpondentes, eam in qua ſit* $\int Z\,dx$ *maximum vel minimum.*

SOLUTIO.

Valor formulæ integralis $\int Z\,dx$ evolvitur in binas has ſeries $Z\,dx + Z'dx + Z''dx + Z'''dx +$ &c. & $Z_{,}dx + Z_{,,}dx + Z_{,,,}dx +$ &c. quarum aggregatum maximum erit vel minimum, ſi ſingulorum terminorum valores differentiales, qui oriuntur augendo applicatam y' particula nv, colligantur, & nihilo æquentur. Tali autem applicatæ y' incremento mutationem patiuntur litteræ y'; p, p'; $q_{,}$, q, q'; adeoque ii tantum termini in quibus iſtæ litteræ inſunt, hoc eſt termini $Z_{,}dx$, $Z\,dx$ & $Z'dx$. Ad horum terminorum augmenta, ex tranſlatione puncti n in v orta, invenienda, differentientur ii, eritque

$$d.Z'dx = dx(M'dx + N'dy' + P'dp' + Q'dq')$$
$$d.Z\,dx = dx(M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq)$$
$$d.Z_{,}dx = dx(M_{,}dx + N_{,}dy_{,} + P_{,}dp_{,} + Q_{,}dq_{,})$$

Jam vero, quia abſciſſa x ab illa tranſlatione non afficitur, ponendum eſt ubique $dx = 0$: deinde vero reliquorum differentialium valores ex tranſlatione puncti n in v orti, per primam hujus Capitis Propoſitionem ita ſe habebunt:

$dy' = +nv$	$dp' = -\frac{nv}{dx}$	$dq' = +\frac{nv}{dx^2}$
$dy = 0$	$dp = +\frac{nv}{dx}$	$dq = -\frac{2nv}{dx^2}$
$dy_{,} = 0$	$dp_{,} = 0$	$dq_{,} = +\frac{nv}{dx^2}$

Digitized by Google

His differentialium per n, expreſſorum valoribus ſubſtitutis, prodibit ſequens valor differentialis, $n\nu . dx \left(N - \frac{P'}{dx} + \frac{P}{dx} + \frac{Q'}{dx^2} - \frac{2Q}{dx^2} + \frac{Q_{,}}{dx^2}\right) = n\nu . dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2}\right) = n\nu . dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ_{,}}{dx^2}\right)$ ob $ddQ_{,} = ddQ$. Quamobrem pro curva quæſita iſta habebitur æquatio $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0$. *Q. E. I.*

COROLL. I.

41. Quod ſi ergo in maximi minimive formula $\int Z dx$ inſint etiam differentialia ſecúndi gradus, ſeu, quod idem eſt, ſi Z fuerit functio ipſarum x, y, p & q; ita ut ſit $dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq$; æquatio pro curva quæſita erit $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0$; quæ facile ex differentiali ipſius Z formabitur.

COROLL. II.

42. Si quantitas Q ipſa involvit q vel differentio-differentiale ipſius y; tum ddQ continebit differentialia quarti ordinis, in hocque genere erit æquatio pro curva inventa. Ex quo curva ſatisfaciens per quatuor data puncta traduci poterit.

COROLL. III.

43. Si igitur in Q contineatur q, tum Problema ita determinate proponendum erit, ut inter omnes curvas per quatuor data puncta ductas ea definiatur, in qua $\int Z dx$ ſit maximum vel minimum.

SCHOLION I.

44. Ponamus in Q non contineri q, ut inveſtigemus cujuſnam

nam gradus futura ſit æquatio differentialis reſultans. Accidit autem hoc, ſi maximi minimive formula propoſita fuerit hujuſmodi $\int Zq\,dx$, exiſtente Z functione tantum ipſarum x, y & p: ita ut ſit $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$. Hinc igitur erit $d.Zq = Mq\,dx + Nq\,dy + Pq\,dp + Z\,dq$: unde pro curva quæſita orietur æquatio hæc $0 = Nq - \frac{P\,dq + q\,dP}{dx} + \frac{dM\,dx + dN\,dy + N\,ddy + P\,ddp + dP\,dp}{dx^2}$, ſeu $0 = 2Nq + \frac{dM + p\,dN}{dx}$, vel $0 = 2N\,dp + dM + p\,dN$: quæ æquipollet tantum æquationi differentialis ſecundi gradus, propter $dp = \frac{ddy}{dx}$ quod ineſt. Si igitur curva deſideretur, in qua ſit $\int Zq\,dx$ maximum vel minimum, exiſtente Z functione ipſarum x, y & p, atque $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$; pro curva quæſita habebitur æquatio $0 = dM + 2N\,dp + p\,dN$.

Coroll. IV.

45. Ut revertamur ad æquationem inventam $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0$; patet eam fore generaliter integrabilem ſi ſit $N = 0$, hoc eſt ſi in Z non contineatur y; prodibit enim integrando $C - P + \frac{dQ}{dx} = 0$. Si inſuper ſit $P = 0$, altera integratio ſuccedit, qua prodit $Cx + D - Q = 0$.

Coroll. V.

46. Si ſit $M = 0$, pariter una integratio in genere ſuccedit: cum enim ſit $dZ = N\,dy + P\,dp + Q\,dq$; multiplicetur æquatio $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d\,dQ}{dx^2} = 0$ per dy, ſeu $p\,dx$, habebitur $N\,dy - p\,dP + \frac{p\,d\,dQ}{dx} = 0$. Addatur $dZ - N\,dy - P\,dp -$

Digitized by Google

$Qdq = 0$, orietur $dZ - pdP - Pdp + \frac{pddQ}{dx} - Qdq = 0$; cujus integrale eſt $Z - Pp + \frac{pdQ}{dx} - Qq = C$.

COROLL. VI.

47. Si fuerit & $M = 0$ & $N = 0$; erit primo, ob $N = 0$, ut ſupra, $C - P + \frac{dQ}{dx} = 0$. Deinde cum ſit $dZ = Pdp + Qdq$, multiplicetur illa æquatio per dp, ſeu qdx, erit $Cdp - Pdp + qdQ = 0$: addatur $Pdp + Qdq - dZ = 0$; prodibit $Cdp + Qdq + qdQ - dZ = 0$, cujus integralis eſt $Cp + D + Qq - Z = 0$.

SCHOLION II.

48. Si nexum æquationis inventæ pro curva quæſita, quæ habeat $\int Z dx$ maximum minimumve, cum differentiali ipſius Z inſpiciamus; determinare licebit relationem inter differentialia dy, dp & dq, ut differentiale ipſius Z nihilo æquale poſitum, præbeat æquationem pro curva quæſita. Cum enim ſit $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$; comparetur cum hac forma æquatio pro curva, $N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0$, ſeu hæc per $dy = pdx$ multiplicata, quæ erit $Ndy - pdP + \frac{pddQ}{dx} = 0$; unde patet, in differentiali ipſius Z, loco Mdx ſcribi debere 0, at terminum Ndy invariatum relinqui, porro loco Pdp ſcribendum eſſe $-pdP$, ac loco Qdq poni debere $\frac{pddQ}{dx}$. Verum quoad hæc a priori pateant, præſtabit formam æquationis inventæ retinere, quippe quæ facile memoria teneri poteſt. Cæterum notandum eſt Problemata huc pertinentia omnino eſſe nova, neque adhuc ab iis qui alias de hoc argumento ſcripſerunt pertractata. Alias enim Scriptores maximi minimive formulas contemplari non conſueverunt, niſi in quibus ad ſummum differen-

Digitized by Google

ferentialia coordinatarum primi gradus ineſſent. Quamobrem eo magis erit operæ pretium naturam hujuſmodi Problematum accuratius indagare, atque inprimis oſtendere, quomodo curvæ ſatisfacientes quatuor puncta, per quæ tranſeant, ad ſui determinationem admittant. Hunc in finem ſequentia Exempla adjicere viſum eſt; atque in ſingulis indicare, quæ ad majorem illuſtrationem facere poterunt.

EXEMPLUM I.

49. Invenire curvam, in qua ſit $\int \frac{y^n \, d\,dy}{x^m \, dy}$ *maximum vel minimum.*

Iſta maximi minimive formula, ope ſubſtitutionum $dy = p\,dx$; & $ddy = q\,dx^2$, abit in hanc $\int \frac{y^n q\,dx}{x^m p}$; quæ cum ſit ſimilis formulæ §. 44 tractatæ $\int Z q\,dx$, ubi in Z tantum x, y & p contineri poſuimus, fiet, comparatione inſtituta, $Z = \frac{y^n}{x^m p}$, & $dZ = -\frac{n y^n dx}{x^{m+1} p} + \frac{n y^{n-1} dy}{x^m p} - \frac{y^n dp}{x^m p^2}$; unde erit $M = -\frac{m y^n}{x^{m+1} p}$, & $N = \frac{n y^{n-1}}{x^m p}$; hincque $Np = \frac{n y^{n-1}}{x^m}$. Cum igitur pro curva quæſita, inventa ſit hæc æquatio $0 = dM + 2N\,dp + p\,dN = dM + N\,dp + d.Np$, habebimus pro noſtro caſu hanc æquationem $0 = \frac{m(m+1) y^n dx}{x^{m+2} p} - \frac{m n y^{n-1} dy}{x^{m+1} p} + \frac{m y^n dp}{x^{m+1} pp} + \frac{n y^{n-1} dp}{x^m p} + \frac{n(n-1) y^{n-2} dy}{x^m} -$

Digitized by Google

$-\frac{nny^{n-1}dx}{x^{m+1}}$: quæ multiplicata per $\frac{x^{m+1}p^2}{y^{n-1}}$ mutatur in hanc $o = m(m+1)ydy - mnxpdy + mxydp + nx^2pdp + \frac{n(n-1)x^2p^2dy}{y} - mnxpdy$, seu $o = m(m+1)y^2dy - 2mnxypdy + n(n-1)x^2p^2dy + mxy^2dp + nx^2ypdp$: quæ est æquatio differentialis secundi gradus, quæ, posito $y = \int v\,dx$ reducetur ad istam primi gradus $m(m+1)v\,dx + mxdv - m(2n-1)xv^2dx + nx^2vdv + n^2x^2v^3dx = o$. Quod si autem ponamus $m = o$, ita ut maximum minimumve esse debeat $\int y^n\,dy$; habebitur hæc æquatio $(n-1)p\,dy + ydp = o$, quæ integrata dabit $y^{n-1}p = C$, seu $y^{n-1}dy = Cdx$; hæcque denuo integrata præbet $y^n = Cx + D$. Sin autem ponamus $n = o$, ita ut maximum minimumve esse debeat hæc formula $\int \frac{dy}{x^m dy}$; erit $(m+1)dy + xdp = o$, seu $(m+1)pdx + xdp = o$, cujus integrale est $x^{m+1}p = C$, seu $dy = Cx^{-m-1}dx$; quæ denuo integrata dat $y = \frac{C}{m} + D$. Patet autem in his curvis inventis formulam propositam fieri maximum, non vero minimum; nam si sumatur linea recta, ob $ddy = o$, manifestum est valorem formulæ propositæ minorem fore pro recta linea quam pro curvis inventis.

SCHOLION III.

50. Ratio hîc assignari potest, cur hujusmodi quæstiones, in quibus $\int Zq\,dx$ maximum minimumve esse debet, deducant tantum ad æquationem differentialem secundi gradus, ideoque quæstionibus præcedentis Problematis potius sint adnumerandæ, siquidem Z fuerit functio ipsarum x & y & p. Nam per reductio-

Digitized by Google

ductionem integralium formula $\int Z q\, dx$, seu $\int \frac{Z\, ddy}{dx}$, reduci potest ad talem formam $T + \int V dx$, in qua T & V sint functiones ipsarum x, y & p tantum, non amplius involventes q. Cum igitur T sit quantitas absoluta, atque idcirco in maximi minimive inquisitionem non cadat, formula $\int Z q\, dx$ fiet maxima vel minima, si $\int V dx$ talis reddatur; adeo ut hujusmodi formulæ $\int Z q\, dx$ reduci queant ad præcedentis Problematis statum; unde mirum non est, quod pro curvis satisfacientibus æquatio differentialis secundi gradus duntaxat reperiatur. Quo autem memorata reductio formulæ $\int Z q\, dx$ seu $\int Z dp$ ad $T + \int V dx$ melius percipiatur; ponamus, cum T sit functio ipsarum x, y & p, esse $dT = \varrho\, dx + \sigma\, dy + \tau\, dp = (\varrho + \sigma p)\, dx + \tau\, dp$; & ex æqualitate $\int Z dp = T + \int V dx$, erit $Z dp = (\varrho + \sigma p)\, dx + \tau\, dp + V dx$; unde concluditur $\tau = Z$ & $V = -\varrho - \sigma p$. Quamobrem ipsa hæc reductio sequenti modo instituetur; integretur formula $Z dp$ positis x & y constantibus, & integrale erit functio ipsarum x, y & p, quæ vocetur T. Deinde differentietur hæc functio T, ponendo p constans, & differentiale negative sumtum dabit $V dx$, eritque V functio ipsarum x, y & p non continens q. Quoties igitur reddi debet hujusmodi formula $\int Z q\, dx$ maximum minimumve, ac Z est functio ipsarum x & y & p; tum quæstio, etiamsi videatur ad præsens Problema pertinere, tamen statim ad Problema præcedens reducetur. Ita si sumamus formulam $\int \frac{y^n\, ddy}{dy}$, seu $\int \frac{y^n\, dp}{p}$; hæc facile transformatur in $y^n lp - n \int y^{n-1} dy\, lp$: unde maximum vel minimum esse debebit hæc formula $\int y^{n-1} dy\, lp$, seu $\int y^{n-1} p\, dx\, lp$, quæ per præcedens Problema tractata, dabit $Z = y^{n-1} p\, lp$, & $dZ = (n-1) y^{n-2} dy\, p\, lp + y^{n-1} dp\,(1 + lp)$; eritque $M = 0$, $N = (n-1) y^{n-2} p\, lp$ & $P = y^{n-1}(1 + lp)$. At ob $M = 0$, supra §. 30 pro curva quæsita inventa est hæc æquatio $Z + C = Py$, quæ ad nostrum casum accommodata præbet

bet

bet $y^{n-1}p\,dp + C = y^{n-1}p + y^{n-1}p\,dp$, sive $y^{n-1}p =$ C; quæ est ea ipsa æquatio, quam ante pro eodem casu in solutione Exempli invenimus. Hanc ob rem ad Exempla huic Problemati propria progrediamur.

EXEMPLUM II.

Fig. 5. 51. *Invenire curvam* A m, *quæ cum sua evoluta* AR *& radio osculi* m R *in quovis loco applicato, minimum spatium* A R m *includat.*

Positis abscissa A M $= x$, applicata M m $= y$; erit radius osculi $mR = -\frac{(1+pp)^{3:2}}{q}$; area autem A R m est $= \int_x^{\prime} mR.\,dx\sqrt{(1+pp)}$; ex qua minimum esse oportet hanc formulam $\int\frac{(1+pp)^2\,dx}{q}$. Erit itaque $Z = \frac{(1+pp)^2}{q}$, & $dZ = \frac{4(1+pp)\,p\,dp}{q} - \frac{(1+pp)^2\,dq}{qq}$; unde fit $M = 0$, $N = 0$, $P = \frac{4(1+pp)\,p}{q}$, & $Q = -\frac{(1+pp)^2}{qq}$. Cum nunc sit $M = 0$ & $Z = 0$; erit, per Coroll. 6, æquatio pro curva quæsita $Z = D + Gp + Qq$, seu $\frac{(1+pp)^2}{q} = D + Cp - \frac{(1+pp)^2}{q}$, hoc est $2(1+pp)^2 = Dq + Cpq$. Quoniam porro est $dp = q\,dx$, seu $q = \frac{dp}{dx}$, erit $2dx = \frac{(D+Cp)\,dp}{(1+pp)^2}$; cujus integrale est $x = \frac{a}{1+pp} + 2b\int\frac{dp}{(1+pp)^2} = \frac{a+bp}{1+pp} + b\int\frac{dp}{1+pp} + c$: mutatis pro lubitu constantibus, habebitur $x = \frac{a+bp+cpp}{1+pp} + b$ A tang. p. Deinde quia est $dy = p\,dx$, erit $y = \int p\,dx = px - \int x\,dp$; ideoque $y = \frac{ap+bp^2+cp^3}{1+pp} + bp$ A tang. $p - \int\frac{(a+bp+cpp)\,dp}{1+pp} - b\int dp$ A tang. p

A tang. $p = \frac{ap + bp^2 + cp^3}{1+pp} - \int \frac{(a+cpp)\,dp}{1+pp}$, ob $bfdp$ A tang. $p = bp$ A tang. $p - bf\frac{p\,dp}{1+pp}$. Hinc erit $y = f + \frac{ap+bp^2+cp^3}{1+pp} + (c-a)$ A tang. $p - cp = \frac{f+(a-c)p+(b+f)pp}{1+pp} + (c-a)$ A tang. p. Atque ex his quidem ipſarum x & y valoribus per p inventis, curva quæſita per data quatuor puncta duci atque conſtrui poteſt. Verum ut ipſa curva qualis ſit cognoſcatur, eliminetur A tang. p; eritque A tang. $p = \frac{x}{b} - \frac{\frac{a}{b} - p - \frac{c}{b}pp}{1+pp}$

$= \frac{y}{c-a} - \frac{\frac{f}{c-a} + p - \frac{(b+f)}{c-a}pp}{1+pp}$; atque hinc $(c-a)x - by = \frac{(ac-aa-bf)+2b(c-a)p+(cc-ac-bb-bf)pp}{1+pp}$.

Quoniam autem ipſa curva non mutatur, etiamſi coordinatæ conſtante quantitate vel augeantur vel diminuantur, erit $(c-a)x - by = \frac{bb-(c-a)^2+2b(c-a)p}{1+pp}$; poſitoque a loco $c-a$, habebitur $ax - by = \frac{bb-aa+2abp}{1+pp}$; & ſubtracta conſtante bb, erit $ax - by = \frac{-aa+2abp-bbpp}{1+pp}$ hincque $\sqrt{(by-ax)} = \frac{bp-a}{\sqrt{(1+pp)}}$. Ponatur arcus curvæ $= w$; erit $dw = dx\sqrt{(1+pp)}$; unde emerget iſta æquatio $dw = \frac{b\,dy - a\,dx}{\sqrt{(by-ax)}}$; atque porro $w = 2\sqrt{(by-ax)}$. Exprimit autem $by - ax$ multiplum abſciſſæ ſuper alio quodam axe fixo aſſumtæ, cui adeo quadratum arcus reſpondentis eſt proportionale. Ex quo intelligitur curvam quæſito reſpondentem eſſe Cycloïdem, quæ per quatuor data puncta determinatur, atque ſic deſcripta inter omnes alias curvas per eadem quatuor puncta ductas, minimum cum ſua evoluta concludit ſpatium.

Concluſio hæc ideo aliquantum difficilior facta eſt, quod Cycloïs pro recta quacunque inſtar axis aſſumpta quæſito ſatisfaciat, atque æquatio pro axe quocunque admodum fiat intricata. Si autem vel a vel b poſuiſſemus $= 0$, quo quidem extenſio ſolutionis non fuiſſet reſtricta; æquatio pro Cycloïde ſtatim prodiiſſet.

EXEMPLUM III.

52. *Invenire curvam, in qua ſit* $\int \varrho^n \, dW$, *denotante* ϱ *radium oſculi, &* dW *elementum curvæ, maximum vel minimum.*

Per poſitiones ante factas eſt $dw = dx\sqrt{(1+pp)}$ & $\varrho = \frac{(1+pp)^{3:2}}{q}$; unde maximi minimive formula erit $\int \frac{(1+pp)^{(3n+1):2} dx}{q^n}$; hincque fit $Z = \frac{(1+pp)^{(3n+1):2}}{nq^n}$ & $dZ =$

$$\frac{(3n+1)(1+pp)^{(3n-1):2} p\,dp}{q^n} - \frac{n(1+pp)^{(3n+1):2} dq}{q^{n+1}}.$$

Quamobrem erit $M = 0$, $N = 0$, $P = \frac{(3n+1)(1+pp)^{(3n-1):2}}{q^n}$, & $Q = \frac{-n(1+pp)^{(3n+1):2}}{q^{n+1}}$. Cum autem ſit $M = 0$ & $N = 0$, erit, per §. 47, $= Cp + D + Qq$; ideoque

$$\frac{(1+pp)^{(3n+1):2}}{q^n} = Cp + D - \frac{n(1+pp)^{(3n+1):2}}{q^n},$$ ſeu

$(n+1)(1+pp)^{(3n+1):2} = (Cp+D)\,q^n$; atque hinc $q = \frac{(1+pp)^{(3n+1):2n}}{\sqrt[n]{(C+Dp)}} = \frac{dp}{dx}$; ergo $dx =$

$dp\sqrt[n]{}$

$dp\sqrt[n]{\frac{C+Dp}{(1+pp)^{(3n+1):2}}}$, atque $dy = p\,dp\sqrt[n]{\frac{C+Dp}{(1+pp)^{(3n+1):2}}}$.

Hic autem merito ſuſpicari licet, æquationem futuram eſſe ſimpliciorem, ſi alius axis accipiatur. Hanc ob rem concipiamus alium axem in quo abſciſſa ſit $= t$, applicata $= v$; ſitque $dv = s\,dt$; ac ponatur $x = \frac{\alpha t + \beta v}{\gamma}$ & $y = \frac{\beta t - \alpha v}{\gamma}$, poſito $\gamma = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$. Erit ergo $dx = \frac{\alpha\,dt + \beta s\,dt}{\gamma}$ & $dy = \frac{\beta\,dt - \alpha s\,dt}{\gamma}$ atque $\frac{dy}{dx} = p = \frac{\beta - \alpha s}{\alpha + \beta s}$, & $(1+pp) = \frac{\gamma^2(1+ss)}{(\alpha+\beta s)^2}$, & $dp = -\frac{\gamma\gamma\,ds}{(\alpha+\beta s)^2}$. Porro autem erit $C + Dp = \frac{\alpha C + \beta D + s(\beta C - \alpha D)}{\alpha + [b]s}$, & $(1+pp)^{(3n+1):3n} = \frac{\gamma^{(3n+1):n}(1+ss)^{(3n+1):2n}}{(\alpha+\beta s)^{(3n+1):n}}$. His ſubſtitutis, erit $dx = \frac{\alpha\,dt + \beta\,dv}{\gamma} = \frac{\alpha(\alpha+\beta s)\,ds}{(1+ss)^{(3n+1):2n}}$, poſito $\beta C = \alpha D$, & mutata conſtante. Porro autem fit $dy = \frac{\beta\,dt - \alpha\,dv}{\gamma} = \frac{\alpha(\beta - \alpha s)\,ds}{(1+ss)^{(3n+1):2n}}$, & conjunctim prodit $dt = \frac{ads}{(1+ss)^{(3n+1):2n}}$; & $dv = \frac{a\,s\,ds}{(1+ss)^{(3n+1):2n}}$. Cum nunc has coordinatas æque x & y appellare poſſimus ac præcedentes, fiet $s = p$, atque $dx = \frac{adp}{(1+pp)^{(3n+1):2n}}$, & $dy = \frac{ap\,dp}{(1+pp)^{(3n+1):2n}}$, quæ ex præcedentibus oriuntur, ſi ibi ponatur $D = 0$: ex quo perſpicuum eſt, latitudini ſolutionis ſuperioris, in qua inerat $C + Dp$, nihil omnino decedere, etſi ponatur $D = 0$. Eadem ſcilicet prodit linea curva, quicunque

Digitized by Google

valor litteræ D tribuatur, etiamsi alia æquatio inter x & y proveniat; verumtamen ad alium axem relata. Notare interim convenit pluribus casibus curvam algebraïcam satisfacere; quorum quasi primus est si $n = \frac{1}{2}$, quo erit $x = \int \frac{a\,dp}{(1+pp)^{5:2}} = \frac{ap(1+\frac{2}{3}pp)}{(1+pp)^{3:2}}$, & $y = \int \frac{ap\,dp}{(1+pp)^{5:2}} = -\frac{\frac{1}{3}a}{(1+pp)^{3:2}}$; unde fiet $(1+pp)^{3:2} = -\frac{a}{3y}$ & $pp = \sqrt[3]{\frac{aa}{9yy}} - 1$, quibus substitutis resultat $x = (2\sqrt[3]{\frac{aay}{9}} + y)\sqrt{(\sqrt[3]{\frac{aa}{9yy}} - 1)}$, æquatio algebraïca pro curva, casu quo est $n = \frac{1}{2}$.

EXEMPLUM IV.

53. *Invenire curvam, in qua sit valor hujus formulæ* $\int \frac{y\,dy\,dx^2}{ddy}$ *omnium minimus.*

Patet primo maximum locum habere non posse, quia in linea recta fit $ddy = 0$; ideoque valor formulæ propositæ infinite magnus. Quamobrem videndum est in quanam linea curva fiat valor formulæ $\int \frac{y\,dy\,dx^2}{ddy}$ minimus. Hæc autem formula per substitutiones nostras abit in hanc $\int \frac{yp\,dx}{q}$; eritque $Z = \frac{yp}{q}$, & $dZ = \frac{p\,dy}{q} + \frac{y\,dp}{q} - \frac{yp\,dq}{qq}$; erit ergo $M = 0$, $N = \frac{p}{q}$, & $P = \frac{y}{q}$, & $Q = -\frac{yp}{qq}$. Quoniam autem est $M = 0$; curva quæsita sequenti exprimetur æquatione $Z - Pp - Qq + \frac{p\,dQ}{dx} = C$, ut Coroll. 5 est ostensum. Quamobrem ista proveniet æquatio $\frac{yp}{q} - \frac{p}{dx}\,d.\frac{yp}{qq} = C$, seu $\frac{y\,dy}{pq} + \frac{a\,dx}{p} = \frac{p\,dy}{qq} + \frac{y\,dp}{qq} - \frac{2yp\,dq}{q^3}$, ob $dy = p\,dx$. Quia vero est $dp = q\,dx$, erit

Digitized by Google

erit $\frac{y\,dp}{qq} = \frac{y\,dx}{q} = \frac{y\,dy}{pq}$; ideoque $\frac{a\,dx}{p} = \frac{p\,dy}{qq} - \frac{2yp\,dq}{q^3}$, vel $\frac{a\,dp}{pp} = \frac{dy}{q} - \frac{2y\,dq}{qq}$. Si ponatur conſtans $a = 0$, hæc æquatio fiet integrabilis, eritque $y = bqq$ & $q = \sqrt{\frac{y}{b}} = \frac{dp}{dx} = \frac{p\,dp}{dy}$, unde fit $p\,dp = dy\sqrt{\frac{y}{b}}$; atque integrando $\frac{pp}{2} = \frac{2}{3}y\sqrt{\frac{y}{b}} + c$, ſeu, mutatis conſtantibus, $pp = \frac{y\sqrt{y} + a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}$, & $p = \sqrt{\frac{y^{3:2} + a^{3:2}}{b^{3:2}}} = \frac{dy}{dx}$; hincque $dx = dy\sqrt{\frac{b^{3:2}}{y^{3:2} + a^{3:2}}}$. Ponatur denuo $a = 0$, erit $x = \frac{b\sqrt{c}}{\sqrt{y}}$ & $xxy = b^2c$; quæ eſt æquatio maxime ſpecialis pro curva quæſtioni ſatisfaciente.

EXEMPLUM V.

54. *Invenire curvam, in qua ſit valor hujus formulæ* $\int q^n dx$, *ſeu* $\int \frac{d\,dy^n}{dx^{2n-1}}$, *maximus vel minimus.*

Habetur ergo $Z = q^n$, & $dZ = nq^{n-1}\,dq$; unde erit $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, & $Q = nq^{n-1}$. Cum igitur æquatio pro curva ſatisfaciente ſit hæc $\frac{d\,dQ}{dx^2} = 0$, erit $dQ = \alpha\,dx$ & $Q = q^{n-1} = \alpha x + \beta$; hincque $q = (\alpha x + \beta)^{1:(n-1)} = \frac{dp}{dx}$; ex quo fiet $p = (\alpha x + \beta)^{n:(n-1)} + \gamma = \frac{dy}{dx}$; & tandem $y = (\alpha x + \beta)^{(2n-1):(n-1)} + \gamma x + \delta$; ubi coefficientes per integrationes ingreſſos in conſtantibus ſumus complexi. Curvæ igitur ſatisfacientes perpetuo ſunt algebraïcæ; excepto caſu, quo eſt $n = \frac{1}{2}$, tum enim poſtrema integra-

tio præbebit $y = \frac{1}{\alpha} l(\alpha x + \beta) + \gamma x + \delta$. Quod ad casum $n = 1$ attinet, ille in investigationem maximorum & minimorum nequidem incurrit; cum formula $\int q\, dx$ non sit indeterminata, sed determinatum valorem, puta p, ob $q\,dx = dp$, referat. Cæterum patet, evanescente termino $(\alpha x + \beta)^{(2n-1):(n-1)}$, lineam rectam quæsito satisfacere, ob $y = \gamma x + \delta$. Scilicet si quatuor puncta data, per quæ curva quæsita transire debeat, sint in directum posita; tum ipsa linea recta, præ omnibus reliquis lineis per eadem quatuor puncta transeuntibus, quæsito satisfaciet.

Exemplum VI.

55. *Invenire curvam, in qua sit* $\int \frac{x p\, dx}{y q}$ *maximum vel minimum.*

Quia est $Z = \frac{xp}{yq}$, erit $dZ = \frac{p\,dx}{yq} - \frac{xp\,dy}{y^2 q} + \frac{x\,dp}{yq} - \frac{xp\,dq}{yqq}$; ideoque $M = \frac{p}{yq}$; $N = -\frac{xp}{y^2 q}$; $P = \frac{x}{yq}$, & $Q = \frac{-xp}{yq^2}$. Quorum terminorum cum nullus evanescat, æquatio pro curva quæsita erit $\frac{-xp}{y^2 q} - \frac{1}{dx}\, d.\, \frac{x}{yq} - \frac{1}{dx^2}\, d^2.\, \frac{xp}{yq^2} = 0$, seu $0 = \frac{xp\,dx^2}{y^2 q} + \frac{dx^2}{yq} - \frac{x\,dx\,dy}{y^2 q} - \frac{x\,dx\,dq}{yq^2} + d.\left(\frac{p\,dx}{yq^2} - \frac{xp\,dy}{y^2 q^2} + \frac{x\,dp}{yq^2} - \frac{2xp\,dq}{yq^3}\right)$; vel $0 = q^2 dx^2 (3yq - 2p^2)(y - xp) - 4yq\,dx\,dq\,(xyq - xp^2 + yp) + 6xy^2 p\,dq^2 - 2xy^2 pq\,ddq$. Quæ est æquatio differentialis quarti ordinis, quæ utrum integrari possit, an non, haud facile patet; neque etiam operæ pretium est in modum eam integrandi diligentius inquirere; quoniam hic casus non ex solutione Problematis alicujus utilis est natus,

natus, ſed fortuito excogitatus. Hoc autem Exemplum ideo adjicere viſum eſt, ut caſus habeatur, quo ſolutio non ſolum ad æquationem differentialem quarti ordinis aſcendit, ſed etiam neque per ſubſidia generalia ſupra allata ad gradum inferiorem perduci queat. Præcedentia enim Exempla cuncta ita ſunt comparata, ut per regulas generales in Corollariis expoſitas ſtatim æquatio pro curva quæſita inferioris gradus differentialis erui potuerit.

PROPOSITIO V. PROBLEMA.

§6. *Invenire curvam, in qua ſit valor formulæ* $\int Z\,dx$ *maximus vel minimus, exiſtente* Z *ejuſmodi functione, quæ differentialia cujuſvis gradus involvat, ita ut ſit* $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds + T\,dt +$ &c.

SOLUTIO.

Quoniam translatio puncti n in ν præcedentia elementa magis afficit, quam ſequentia; unicum enim ſequens elementum afficit, at in præcedentia eo ulterius extenditur, quo altiorum ordinum differentialia adſint; hanc ob rem expediet aliquam anteriorem applicatam, uti H h, pro prima accipere, ita ut mutatio ex particula n ν applicatæ N n adjecta non citra H h porrigatur; id quod eveniet ſi in Z differentialia non ultra ſextum ordinem aſcendant. Sufficiet autem valorem ipſius dZ ad terminum $T\,dt$ uſque extendere, quia ex ipſa ſolutione modus facile colligetur eam ad quotcunque ulteriores terminos accommodandi. Præterea, quia in hoc Problemate præcedentia omnia continentur, conſtabit ſimul ſolutionem perpetuo eandem prodire, quæcunque applicata particula quadam infinite parva, uti n ν, augeatur. Sit igitur A H $= x$, & H h $= y$, reſpondebunt ſingulis punctis abſciſſæ H, I, K, L, M, N, O &c. valores litterarum p, q, r, s, t &c. ut ſequitur: *Fig. 4.*

H	y,	p,	q,	r,	s,	t
I	y',	p',	q',	r',	s',	t'
K	y'',	p'',	q'',	r'',	s'',	t''
L	y''',	p''',	q''',	r''',	s''',	t'''
M	y^{IV},	p^{IV},	q^{IV},	r^{IV},	s^{IV},	t^{IV}
N	y^{V},	p^{V},	q^{V},	r^{V},	s^{V},	t^{V}.

Hi autem ſinguli valores a tranſlatione n in ν ſequentia augmenta accipient, quæ ex Propoſitione prima, debita mutatione ſignorum adhibita, ita ſe habebunt.

$dy = 0$	$dy' = 0$	$dy'' = 0$	$dy''' = 0$	$dy^{IV} = 0$	$dy^{V} = +n\nu$
$dp = 0$	$dp' = 0$	$dp'' = 0$	$dp''' = 0$	$dp^{IV} = +\frac{n\nu}{dx}$	$dp^{V} = -\frac{6n\nu}{dx}$
$dq = 0$	$dq' = 0$	$dq'' = 0$	$dq''' = +\frac{n\nu}{dx^2}$	$dq^{IV} = -\frac{2n\nu}{dx^2}$	$dq^{V} = +\frac{n\nu}{dx^2}$
$dr = 0$	$dr' = 0$	$dr'' = +\frac{n\nu}{dx^3}$	$dr^{IV} = -\frac{3n\nu}{dx^3}$	$dr^{V} = +\frac{3n\nu}{dx^3}$	$dr^{VI} = -\frac{n\nu}{dx^3}$
$ds = 0$	$ds' = +\frac{n}{dx}$	$ds'' = -\frac{4n\nu}{dx^4}$	$ds''' = +\frac{6n\nu}{dx^4}$	$ds^{IV} = \frac{4n\nu}{dx^4}$	$ds^{V} = +\frac{n\nu}{dx^4}$
$dt = +\frac{n\nu}{dx^5}$	$dt' = -\frac{5n}{dx}$	$dt'' = +\frac{10n\nu}{dx^5}$	$dt''' = -\frac{10n\nu}{dx^5}$	$dt^{IV} = +\frac{5n\nu}{dx^5}$	$dt^{V} = -\frac{n\nu}{dx^5}$

Quoniam porro valor formulæ $\int Z\,dx$ abſciſſæ A H reſpondet, iſque a tranſlatione puncti n in ν non mutatur, ſequentibus abſciſſæ elementis valores formulæ $\int Z\,dx$ reſpondent, qui in hac Tabula exhibentur.

Elemento	reſpondet
HI	$Z\,dx$
IK	$Z'\,dx$
KL	$Z''\,dx$
LM	$Z'''\,dx$
MN	$Z^{IV}\,dx$
NO	$Z^{V}\,dx$

Adho-

Ad horum valorum incrementa, ex tranſlatione puncti n in ν oriunda, invenienda, ſingulos hos valores differentiari, locoque differentialium dy, dp, dq, dr, ds, dt cum ipſorum derivativis valores ſupra aſſignatos & per n.ν expreſſos ſubſtitui oportet; eritque ut ſequitur:

$$d.Z\,dx = \mathfrak{n}\nu.dx\left(\frac{T}{dx^5}\right)$$

$$d.Z'\,dx = \mathfrak{n}\nu.dx\left(\frac{S'}{dx^4} - \frac{5T'}{dx^5}\right)$$

$$d.Z''\,dx = \mathfrak{n}\nu.dx\left(\frac{R''}{dx^3} - \frac{4S''}{dx^4} + \frac{10T''}{dx^5}\right)$$

$$d.Z'''\,dx = \mathfrak{n}\nu.dx\left(\frac{Q'''}{dx^2} - \frac{3R'''}{dx^3} + \frac{6S'''}{dx^4} - \frac{10T'''}{dx^5}\right)$$

$$d.Z^{IV}\,dx = \mathfrak{n}\nu.dx\left(\frac{P^{IV}}{dx} - \frac{2Q^{IV}}{dx^2} + \frac{3R^{IV}}{dx^3} - \frac{4S^{IV}}{dx^4} + \frac{5T^{IV}}{dx^5}\right)$$

$$d.Z^{V}\,dx = \mathfrak{n}\nu.dx\left(N^{V} - \frac{P^{V}}{dx} + \frac{Q^{V}}{dx^2} - \frac{R^{V}}{dx^3} + \frac{S^{V}}{dx^4} - \frac{T^{V}}{dx^5}\right)$$

Quia jam hæc ſola elementa a tranſpoſitione puncti n in ν alterantur & incrementa capiunt, ſumma horum incrementorum dabit integrum valorem differentialem, quem formula $\int Z\,dx$ ad totam abſciſſam **A Z** extenſa accipit; qui igitur erit

$$\mathfrak{n}\nu.dx\left\{\begin{array}{l} +N^{V} \\ -\frac{P^{V}+P^{IV}}{dx} \\ +\frac{Q^{V}-2Q^{IV}+Q'''}{dx^2} \\ -\frac{R^{V}+3R^{IV}-3R'''+R''}{dx^3} \\ +\frac{S^{V}-4S^{IV}+6S'''-4S''+S'}{dx^4} \\ -\frac{T^{V}+5T^{IV}-10T'''+10T''-5T'+T}{dx^5} \end{array}\right.$$

Singula autem hæc membra per differentialia commode & ſuccincte exprimi poterunt: erit enim,

$$-P^{V}+P^{IV}=-dP^{IV}$$
$$+Q^{V}-2Q^{IV}+Q'''=+ddQ'''$$
$$-R^{V}+3R^{IV}-3R'''+R''=-d^{3}R''$$
$$+S^{V}-4S^{IV}+6S'''-4S''+S'=+d^{4}S'$$
$$-T^{V}+5T^{IV}-10T'''+10T''-5T'+T=-d^{5}T$$

Quamobrem formulæ $\int Z\,dx$ integer valor differentialis ex particula $n\nu$ ortus, erit $= n\nu.\,dx\,(N^{V}-\frac{dP^{IV}}{dx}+\frac{ddQ'''}{dx^{2}}-\frac{d^{3}R''}{dx^{3}}+\frac{d^{4}S'}{dx^{4}}-\frac{d^{5}T}{dx^{5}})$. Hîc autem, quia omnes termini sunt homogenei, signaturæ tuto omitti possunt, evanescit enim discrimen inter N^{V} & N, itemque inter dP^{IV} & dP, reliquaque. Quocirca habebitur formulæ $\int Z\,dx$ iste valor differentialis

$$n\nu.\,dx\,(N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^{2}}-\frac{d^{3}R}{dx^{3}}+\frac{d^{4}S}{dx^{4}}-\frac{d^{5}T}{dx^{5}}):$$

ex quo simul valor differentialis formulæ $\int Z\,dx$ colligi potest; si in Z altiora etiam differentialia inessent. Quare si curva quæratur, quæ habeat $\int Z\,dx$ maximum vel minimum pro data abscissa, fueritque $dZ=M\,dx+N\,dy+P\,dp+Q\,dq+R\,dr+S\,ds+T\,dt+$ &c. erit primum formulæ $\int Z\,dx$ valor differentialis hic:

$$n\nu.\,dx\,(N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^{2}}-\frac{d^{3}R}{dx^{3}}+\frac{d^{4}S}{dx^{4}}-\frac{d^{5}T}{dx^{5}}+\&c.)$$

Hincque pro curva quæsita orietur ista æquatio

$$0=N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^{2}}-\frac{d^{3}R}{dx^{3}}+\frac{d^{4}S}{dx^{4}}-\frac{d^{5}T}{dx^{5}}+\&c.\ Q.E.I.$$

COROLL. I.

57. In formula $\int Z\,dx$, uti eam tractavimus, quantitas Z continet differentialia quinti gradus: si quidem in differentiali ipsius

ipſius $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + Tdt$ terminus Tdt eſt ultimus. Cum igitur in T adhuc inſint differentialia quinti gradus ſeu t, perſpicuum eſt æquationem pro curva quæſita fore differentialem decimi gradus.

Coroll. II.

58. Hinc intelligitur perpetuo æquationem differentialem pro curva ad gradum duplo altiorem aſcendere debere, quam fuerit ipſa formula maximi minimive. Ponimus enim, in ultimo termino Tdt, quantitatem T adhuc t in ſe complecti: niſi enim hoc eſſet, duobus gradibus æquatio deprimeretur, uti ex §. 50 colligere licet.

Coroll. III.

59. Si igitur in Z differentialia gradus n contineantur, tum æquatio pro curva differentialis erit gradus $2n$: & hanc ob rem totidem novas conſtantes arbitrarias poteſtate in ſe continet.

Coroll. IV.

60. Ob tot igitur conſtantes arbitrarias, totidem puncta ad Problema determinandum propoſita eſſe oportet; ita ſcilicet Problema, ut ſit determinatum, enuntiari debebit; Inter omnes curvas per data $2n$ puncta tranſeuntes, determinare eam in qua ſit $\int Z dx$ maximum vel minimum, ſiquidem quantitas Z complectatur differentialia n gradus.

Coroll. V.

61. Ob n igitur numerum integrum, numerus punctorum, quo Problema determinabitur, ſemper erit par. Sic, vel nullum punctum, vel duo, vel quatuor, vel ſex, vel octo puncta, & ita porro, ad Problematis determinationem requiruntur.

SCHOLION I.

62. Ex gradu *differentialitatis* igitur, ad quem æquatio pro curva inventa aſſurgit, vel ex numero punctorum per quæ curvam ſatisfacientem tranſire oportet, hujuſmodi Problemata commode in Claſſes diſtribui poterunt. Ad primam igitur Claſſem ea referentur Problemata, in quibus abſolute quæritur linea curva, quæ pro data abſciſſa habeat valorem $\int Z dx$ maximum vel minimum; talia Problemata cum in Propoſitione ſecunda continentur, tum etiam in tertia, iis caſibus quos §. §. 26 & 27 expoſuimus; his ſcilicet caſibus ſolutio præbet curvam determinatam quæſito ſatisfacientem. Claſſis ſecunda ea complectitur Problemata, quorum ſolutio ad æquationem differentialem ſecundi gradus perducit: hæcque duo puncta ad ſui determinationem poſcunt; & ita proponi debent, ut inter omnes curvas per data duo puncta tranſeuntes ea definiatur, in qua ſit $\int Z dx$ maximum vel minimum: cujuſmodi Problemata in Propoſitione tertia ſoluta dedimus. Porro ad tertiam Claſſem pertinent Problemata in Propoſitione quarta tractata, quæ ita ſe habent, ut inter omnes curvas per quatuor data puncta tranſeuntes determinetur ea quæ habeat $\int Z dx$ maximum vel minimum. Simili modo quarta Claſſis poſtulat ad determinationem ſex puncta, quinta octo, & ita porro, quas Claſſes omnes in præſente Problemate ſumus complexi. Cæterum etſi æquatio inventa ad tantum differentialium gradum aſcendit, tamen ſæpius generaliter integrationem unam vel plures admittit, cujuſmodi caſus in præcedentibus Problematibus nonnullos exhibuimus. Hanc ob rem videamus etiam quibus caſibus æquatio noſtra generalis integrationem, vel unam vel plures, admittat; ut in allatis Exemplis ſtatim videre liceat, utrum ea in his caſibus contineantur an ſecus. Hujuſmodi autem caſus potiſſimum ſunt duo; in quorum altero eſt $N = 0$, in altero $M = 0$, a quibus deinceps alii caſus pendent, quos hic evolvemus.

CA-

Digitized by Google

CASUS I.

63. Sit in maximi minimive formula $\int Z\,dx$ terminus $N = 0$; ita ut fit $dZ = M\,dx + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds + \&c.$

Hoc ergo casu æquatio pro curva erit hæc, $0 = -\frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5} + \&c.$ quæ, per dx multiplicata, fit integrabilis, prodibitque

$$0 = A - P + \frac{dQ}{dx} - \frac{ddR}{dx^2} + \frac{d^3S}{dx^3} - \frac{d^4T}{dx^4} + \&c.$$

CASUS II.

64. Sit & $N = 0$ & $P = 0$, ita ut fit $dZ = M\,dx + Q\,dq + R\,dr + S\,ds + T\,dt + \&c.$

Quoniam est $N = 0$, una integratio jam successit, habeturque pro curva quæsita ista æquatio modo inventa, posito etiam $P = 0$:

$$0 = A + \frac{dQ}{dx} - \frac{ddR}{dx^2} + \frac{d^3S}{dx^3} - \frac{d^4T}{dx^4} + \&c.$$

quæ per dx multiplicata denuo integrari poterit, eritque

$$0 = Ax - B + Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \frac{d^3T}{dx^3} + \&c.$$

CASUS III.

65. Si fuerit & $N = 0$ & $P = 0$ & $Q = 0$, ita ut sit $dZ = M\,dx + R\,dr + S\,ds + T\,dt + \&c.$

Bini valores N & P evanescentes jam præbuerunt hanc æquationem bis integratam $0 = Ax - B + Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \frac{d^2T}{dx^3} + \&c.$ in qua si ponatur $Q = 0$, & multiplicetur per dx, obtinebitur sequens æquatio ter integrata:

$$0 = Ax^2 - Bx + C - R + \frac{dS}{dx} - \frac{ddT}{dx^2} + \&c.$$

Ex quo jam apparet, si insuper fuerit $R = 0$, tum etiam quartam integrationem locum habere, & ita porro.

Casus IV.

66. Si fuerit $M = 0$, ita ut sit $dZ = N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds +$ &c.

Æquatio pro curva quæsita ante prodiit $0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d\,dQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} -$ &c. quæ multiplicetur per $dy = p\,dx$, & tum addatur $dZ - N\,dy - P\,dp - Q\,dq - R\,dr - S\,ds -$ &c. prodibit.

$$0 = dZ - p\,dP + \frac{p\,dd\,Q}{dx} - \frac{p\,d^3R}{dx^2} + \frac{p\,d^4S}{dx^3} - \text{&c.}$$
$$- P\,dp - Q\,dq - R\,dr - S\,ds - \text{&c.}$$

cujus integrale assignari potest; erit enim

$$0 = A + Z - Pp + \frac{p\,dQ}{dx} - \frac{p\,d\,dR}{dx^2} + \frac{p\,d^3S}{dx^3} \text{ &c.}$$
$$- Qq + \frac{q\,dR}{dx} - \frac{q\,d\,dS}{dx^2}$$
$$- Rr + \frac{r\,dS}{dx}$$
$$- Ss$$

vel $0 = A + Z - Pp + \frac{p\,dQ - Q\,dp}{dx} - \frac{p\,ddR - dp\,dR + R\,ddp}{dx^2}$

$+ \frac{p\,d^3S - dp\,d\,dS + d\,S\,ddp - S\,d^3p}{dx^3} -$ &c. cujus termini, quomodo ulterius progrediantur, si in dZ insint sequentia differentialia $T\,dt$, $U\,du$ &c. sponte patet.

Casus V.

67. Si sit & $M = 0$, & $N = 0$; ita ut sit $dZ = P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds +$ &c.

Quia est $N = 0$, una integratio per casum primum instituatur,

Digitized by Google

tur, habebiturque $o = A - P + \frac{dQ}{dx} - \frac{ddR}{dx^2} + \frac{d^3S}{dx^3} - \&c.$

quæ multiplicetur per $dp = qdx$, ad eamque addatur $o = -dZ + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \&c.$ quo facto prodibit ista æquatio integrabilis

$$o = Adp - dZ + qdQ - \frac{qddR}{dx} + \frac{qd^2S}{dx^2} - \&c.$$
$$+ Qdq + Rdr + Sds + \&c.$$

cujus integrale erit

$$o = Ap - B - Z + Qq - \frac{qdR}{dx} + \frac{qddS}{dx^2} \&c.$$
$$+ Rr - \frac{rdS}{dx}$$
$$+ Ss$$

seu $o = Ap - B - Z + Qq - \frac{qdR - Rdq}{dx} +$

$$\frac{qddS - dqdS + Sddq}{dx^2} - \frac{qd^2T - dqddT + dTddq - Td^2q}{dx^3} \&c.$$

CASUS VI.

68. Sit & $M = o$ & $N = o$ & $P = o$, ita ut sit $dZ = Qdq + Rdr + Sds + Tdt + \&c.$

Ob $N = o$ & $P = o$, per Casum secundum, duæ integrationes locum habent, eritque æquatio, pro curva quæsita, hæc,

$$o = Ax - B + Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \frac{d^2T}{dx^3} + \&c.$$

ad quam per $dq = rdx$ multiplicatam si addatur $o = dZ - Qdq - Rdr - Sds - Tdt - \&c.$ habebitur ista æquatio denuo integrabilis:

$$o = Axdq - Bdq + dZ - rdR + \frac{rddS}{dx} - \frac{rd^2T}{dx^2} + \&c.$$
$$- Rdr - Sds - Tdt - \&c.$$

cujus integrale est

$$o =$$

$$0 = Axq - Bq + C + z - Rr + \frac{rdS}{dx} - \frac{rddT}{dx^2}$$
$$- Ap \qquad - Ss + \frac{sdT}{dx} \qquad \&c.$$
$$- Tt$$

seu $0 = A(xq - p) - Bq + C + z - Rr + \frac{rdS - Sdr}{dx}$
$- \frac{rddT - drdT + Tddr}{dx^2} + \&c.$

CASUS VII.

69. Si fuerit $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, & $Q = 0$, ita ut sit $dZ = Rdr + Sds + Tdt + \&c.$

Ob $N = 0$, & $Q = 0$, Casus tertius istam suppeditat æquationem pro curva jam ter integratam,

$$0 = Ax^2 - Bx + C - R + \frac{dS}{dx} - \frac{ddT}{dx^2} + \&c.$$

ad quam per $dr = sdx$ multiplicatam addatur $0 = -dZ + Rdr + Sds + Tdt + \&c.$ quo facto prodibit ista æquatio,

$$0 = Ax^2 dr - Bxdr + Cdr - dZ + sdS - \frac{sddT}{dx} + \&c.$$
$$+ Sds + Tdt + \&c.$$

quæ integrata dabit hanc,

$$0 = Ax^2 r - Bxr + Cr - D - z + Ss - \frac{sdT}{dx} + \&c.$$
$$- 2Axq + Bq \qquad + Tt$$
$$+ 2Ap$$

seu $0 = A(x^2 r - 2xq + 2p) - B(xr - q) + Cr - D$
$- z + Ss - \frac{sdT - Tds}{dx} + \&c.$

SCHO

SCHOLION II.

70. Horum caſuum ope, quorum numerum ulterius augere liceret, ſi commodum videretur, ſæpe-numero Problemata admodum expedite reſolvi poterunt. Quod ſi enim Problema quodpiam contineatur in aliquo iſtorum Caſuum, qui unam pluresve integrationes per ſe admittat, ſtatim formari poterit æquatio pro curva, ſemel vel aliquoties jam integrata, quæ propterea ulterius facilius tractari poterit. Quod ut diſtinctius pateat, ſimulque uſus hujus poſtremi Problematis, quo in maximi minimive formula $\int Z dx$ differentialia ſecundum gradum ſuperantia inſunt, declaretur, unicum Exemplum afferre juvabit.

EXEMPLUM.

71. *Inter omnes curvas eidem abſciſſæ reſpondentes, definire eam, cujus evoluta, cum ſua ipſius evoluta, intra radios evolutæ maximum minimumve ſpatium complectatur.*

Poſitis, pro curva quæſita, abſciſſa $= x$ & applicata $= y$; ſit elementum curvæ $= dw$, & ejus radius oſculi $= \varrho$; erit elementum ipſius evolutæ $= d\varrho$, & hujus radius oſculi $= \frac{\varrho d\varrho}{dw}$: unde area comprehenſa inter evolutam curvæ quæſitæ, ipſiuſque evolutam, erit $= \frac{1}{2}\int \frac{\varrho d\varrho^2}{dw}$; quæ ergo expreſſio maxima minimave eſt reddenda. Cum autem ſit $dw = dx\sqrt{(1+pp)}$; & $\varrho = \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{q}$; erit $d\varrho = 3(1+pp)^{\frac{1}{2}} p\,dx - \ldots$ $\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}} r\,dx}{qq}$, & $d\varrho^2 = (1+pp)\,dx^2\,(9pp - 6(1+pp)r + \frac{(1+pp)^2 rr}{qq})$ atque $\frac{\varrho}{dw} = \frac{1+pp}{qdx}$. Maximi minimive formula itaque eſt $\int \frac{(1+pp)^2}{q}\,dx\,(9pp -$

$\frac{6(1+pp)r}{qq} + \frac{(1+pp)^2r^2}{q^4}) = \int dx(\frac{9pp(1+pp)^2}{q} - \frac{6'1+pp)^3r}{q^3}$
$+\frac{(1+pp)^4r^2}{q^5})$, ex quo Z erit functio ipsarum p, q & r; unde differentiando prodibit:

$$dZ = \frac{18pdp(1+pp)(1+3pp)}{q} - \frac{9ppdq(1+pp)^2}{qq} - \frac{6dr(1+pp)^3}{q^3}$$
$$- \frac{36prdp(1+pp)^2}{q^3} + \frac{18rdq(1+pp)^3}{q^4} + \frac{2rdr(1+pp)^4}{q^5}$$
$$+ \frac{8rrpdp(1+pp)^3}{q^5} - \frac{5r^2dq(1+pp)^4}{q^6}$$

Comparatione ergo cum forma generali instituta, erit $M = 0$;
$N = 0$;

$$Z = \frac{9pp(1+pp)^2}{q} - \frac{6(1+pp)^3r}{q^3} + \frac{(1+pp)^4r^2}{q^5}$$
$$P = \frac{18p(1+pp)(1+3pp)}{q} - \frac{36pr(1+pp)^2}{q^3} + \frac{8rrp(1+pp)^3}{q^5}$$
$$Q = -\frac{9pp(1+pp)^2}{qq} + \frac{18r(1+pp)^3}{q^4} - \frac{5rr(1+pp)^4}{q^6}$$
$$R = -\frac{6(1+pp)^3}{q^3} + \frac{2r(1+pp)^4}{q^5}$$

Cum nunc sit $M = 0$ & $N = 0$, solutio cadit in Casum quintum, critque æquatio pro curva quæsita hæc,

$$0 = Ap - B - Z + Qq + Rr - \frac{qdR}{dx}$$

quæ, factis substitutionibus, transit in hanc

$$0 = Ap - B - \frac{18pp(1+pp)^2}{q} - \frac{16pr(1+pp)^3}{q^3} + \frac{6rr(1+pp)^4}{q^5}$$
$$- \frac{2dr(1+pp)^4}{q^4dx} + \frac{36p(1+pp)^2}{q};$$

quæ æquatio nimis est complicata, quam ut ejus ulteriores integrationes suscipi queant. Cæterum apparet hanc æquationem esse differentialem quarti ordinis, ita ut per quatuor residuas integrationes quatuor constantes adhuc ingrediantur: ex quo sex data oportebit esse puncta, per quæ curva transeat, ut Problema determinetur.

CAPUT

CAPUT III.

De inventione curvarum maximi minimive proprietate prædita, si in ipsa maximi minimive formula insunt quantitates indeterminatæ.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

1. *INvenire incrementa, quæ quantitas integralis indeterminata, in quovis abscissæ puncto, ab aucta alicubi una applicata* Nn *particula* nv, *capit.* Fig. 4.

SOLUTIO.

Sit abscissa $AH = x$, applicata respondens $Hh = y$, & proposita sit quantitas quæcunque indeterminata π, abscissæ AH respondens, quæ sit formula integralis indefinite integrationem non admittens. Quantitas hæc π ita sit comparata, ut ipsa, quatenus abscissæ AH seu puncto H respondet, ab aucta applicata Nn non mutetur: quod eveniet, si in π differentialia non ultra quintum gradum assurgant; quem in finem quintam demum applicatam Nn ab Hh computando mutari ponimus. Si enim in π differentialia altiorum graduum continerentur, tum deberet ulterior demum applicata post Nn particula infinite parva augeri. Sufficiet autem solutionem ad quinque tantum differentialium in π contentorum gradus extendere; cum inde, si etiam altiora affuerint differentialia, solutionem ad ea accommodare liceat. Quemadmodum igitur puncto abscissæ H respondet valor π, ita secundum nostram notandi methodum, puncto sequenti I respondebit valor π', puncto K vero π'', puncto L valor π''', & ita porro. Id ergo erit investigandum, quanta incrementa ex translatione puncti n in v singuli hi valores derivativi π', π'', π''', π'''', &c. accipiant, seu definiri de-

bent eorum differentialia, ſi ſola applicata Nn, quæ eſt $= y^{\nu}$ variari & particula $n\nu$ augeri ponatur: erit autem hoc ſenſu $d.\,\pi = 0$, quia valorem π puncto H reſpondentem inde non affici ponimus. Quoniam jam π eſt formula integralis indefinita, ſit ea $= \int [Z]\,dx$, & $[Z]$ ſit functio ipſarum x, y, p, q, r, s & t, ita ut ſit $d[Z] = [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq + [R]\,dr + [S]\,ds + [T]\,dt$; unde ſimul valores derivativi ipſius $d[Z]$, nempe $d[Z']$, $d[Z'']$, $d[Z''']$, &c. per notandi modum receptum formari poterunt. His poſitis, erit ut ſequitur

$$\pi = \int [Z]\,dx$$
$$\pi' = \int [Z]\,dx + [Z]\,dx$$
$$\pi'' = \int [Z]\,dx + [Z]\,dx + [Z']\,dx$$
$$\pi''' = \int [Z]\,dx + [Z]\,dx + [Z']\,dx + [Z'']\,dx$$
$$\pi'''' = \int [Z]\,dx + [Z]\,dx + [Z']\,dx + [Z'']\,dx + [Z''']\,dx$$

&c.

Jam videamus quanta incrementa ſingula hæc membra $[Z]\,dx$, $[Z']\,dx$, $[Z'']\,dx$, $[Z''']\,dx$, &c. ex adjecta particula $n\nu$ ad applicatam Nn capiant; quæ obtinebuntur ex ipſorum differentialibus, ponendo loco differentialium valores §. 56 Capitis præcedentis expoſitos: erit itaque

$$d.[Z]\,dx = n\nu.\,dx.\,\frac{[T]}{dx^3}$$
$$d.[Z']\,dx = n\nu.\,dx\left(\frac{[S']}{dx^4} - \frac{5[T']}{dx^3}\right)$$
$$d.[Z'']\,dx = n\nu.\,dx\left(\frac{[R'']}{dx^3} - \frac{4[S'']}{dx^4} + \frac{10[T'']}{dx^5}\right)$$
$$d.[Z''']\,dx = n\nu.\,dx\left(\frac{[Q''']}{dx^2} - \frac{3[R''']}{dx^3} + \frac{6[S''']}{dx^4} - \frac{10[T''']}{dx^5}\right)$$
$$d.[Z'''']\,dx = n\nu.\,dx\left(\frac{[P'''']}{dx} - \frac{2[Q'''']}{dx^2} + \frac{3[R'''']}{dx^3} - \frac{4[S'''']}{dx^4} + \frac{5[T'''']}{dx^5}\right)$$
$$d.[Z'''''']\,dx = n\nu.\,dx\left([N'''''] - \frac{[P'''''']}{dx} + \frac{[Q'''''']}{dx^2} - \frac{[R'''''']}{dx^3} + \frac{[S'''''']}{dx^4} - \frac{[T'''''']}{dx^5}\right)$$
$$d.[Z''''''']\,dx = 0,$$
$$d.[Z'''''''']\,dx = 0.$$ & reliqua ſequentia omnia evaneſcent.

Ex

Digitized by Google

Ex his nunc colligentur incrementa valorum Π, Π', Π'', Π''', &c. quæ recipiunt ex tranſlatione puncti n in ν; erit ſcilicet

$$d.\,\Pi = 0$$

$$d.\,\Pi' = n\nu.\,dx.\,\frac{[T]}{dx^3}$$

$$d.\,\Pi'' = n\nu.\,dx\left(\frac{[S']}{dx^4} - \frac{4[T'] + d[T]}{dx^3}\right)$$

$$d.\Pi''' = n\nu.\,dx\left(\frac{[R'']}{dx^3} - \frac{3[S''] + d[S']}{dx^4} + \frac{6[T''] + 4d[T'] - d[T]}{dx^5}\right)$$

$$d.\Pi'''' = n\nu.\,dx\left(\frac{[Q''']}{dx^2} - \frac{2[R'''] + d[R'']}{dx^3}\right.$$

$$\left. + \frac{3[S'''] + 3d[S''] - d[S']}{dx^4} - \frac{4[T'''] + 6d[T''] - 4d[T'] + [dT]}{dx^5}\right)$$

$$d.\Pi^{v} = n\nu.\,dx\left(\frac{[P^{iv}]}{dx} - \frac{[Q^{iv}] + d[Q''']}{dx^2} + \frac{[R^{iv}] + 2d[R'''] - d[R'']}{dx^3} - \right.$$

$$\left. \frac{[S^{iv}] + 3d[S'''] \ldots 3d[S''] + d[S']}{dx^4} + \frac{[T^{iv}] + 4d[T'''] - 6d[T''] + 4d[T'] - d[T]}{dx^5}\right)$$

$$d.\,\Pi^{vi} = n\nu.\,dx\left([N^{v}] - \frac{d[P^{iv}]}{dx} + \frac{d[Q^{iv}] - d[Q''']}{dx^2}\right.$$

$$- \frac{d[R^{iv}] - 2d[R'''] + d[R'']}{dx^3} + \frac{d[S^{iv}] - 3d[S'''] + 3d[S''] - d[S']}{dx^4}$$

$$\left. - \frac{d[T^{iv}] - 4d[T'''] + 6d[T''] - 4d[T'] + d[T]}{dx^5}\right)$$

Huic autem incremento æqualia ſunt incrementa omnium ſequentium valorum, nempe ipſorum Π^{vii}, Π^{viii}, Π^{ix}, &c. Atqui valoris Π^{vi} & omnium ſequentium incrementum idem erit $= n\nu.\,dx\left([N^{v}] - \frac{d[P^{iv}]}{dx} + \frac{dd[Q''']}{dx^2} - \frac{d^3[R'']}{dx^3} + \frac{d^4[S']}{dx^4} - \frac{d^5[T]}{dx^5}\right)$. Poterunt autem hæc incrementa ad eadem ſigna reduci, reſpectu litterarum $[P]$, $[Q]$, $[R]$, $[S]$, & $[T]$, ſicque prodibit

$$d.\Pi = 0$$

$$d.\Pi' = \mathrm{n}v.\,dx.\,\frac{[T]}{dx^3}$$

$$d.\Pi'' = \mathrm{n}v.\,dx\,\Big(\,\frac{[S']}{dx^4} - \frac{4[T]+5d[T]}{dx^3}\,\Big)$$

$$d.\Pi''' = \mathrm{n}v.dx\Big(\frac{[R'']}{dx^3} - \frac{3[S']+4d[S']}{dx^4} + \frac{6[T]+15d[T]+10dd[T]}{dx^5}\,\Big)$$

$$d.\Pi'''' = \mathrm{n}v.dx\Big(\frac{[Q''']}{dx^2} - \frac{2[R'']+3d[R'']}{dx^3} + \frac{3[S']+8d[S']+6dd[S']}{dx^4}$$
$$- \frac{4[T]+15d[T]+20dd[T]+10d^3[T]}{dx^5}\,\Big)$$

$$d.\Pi^{V} = \mathrm{n}v.\,dx\,\Big(\frac{[P^{V}]}{dx} - \frac{[Q''']+2d[Q''']}{dx^2} + \frac{[R'']+3d[R'']+3dd[R'']}{dx^3}$$
$$- \frac{[S']+4d[S']+5dd[S']+4d^3[S']}{dx^4} + \frac{[T]+5d[T]+10dd[T]+10d^3[T]+5d^4[T]}{dx^5}\,\Big)$$

$$d\Pi^{VI} = \mathrm{n}v.dx\,\Big([N^{VI}] - \frac{d[P^{V}]}{dx} + \frac{dd[Q''']}{dx^2} - \frac{d^3[R'']}{dx^3} + \frac{d^4[S']}{dx^4} - \frac{d^5[T]}{dx^5}\,\Big)$$

cui ſequentium valorum omnium incrementa ſunt æqualia. *Q. E. I.*

Coroll. I.

2. Si ergo n fuerit hujuſmodi quantitas indeterminata, ſeu formula integralis indefinite integrationem non admittens, tum ejus omnes valores poſt locum abſciſſæ, ubi una applicata augeri concipitur, mutationem patientur, & aliquot ejus etiam valores ante illum locum, quorum numerus pendet a gradu differentialium, quæ in ea formula n inſunt.

Coroll. II.

3. Quod ſi ergo iſtiuſmodi quantitas inſit in maximi minimive formula $\int Z\,dx$, tum ejus valor differentialis non ſolum ab aliquot abſciſſæ elementis, verum a tota abſciſſa, cui maximum minimumve reſpondere debet, pendebit.

Co-

Digitized by Google

COROLL. III.

4. His igitur casibus abscissam illam, pro qua maximum minimumve quæritur, determinatam esse oportet, atque curva quæ, pro hac abscissa, maximi minimive proprietate gaudere reperta fuerit, eadem pro aliis abscissis hac proprietate non erit prædita.

SCHOLION.

5. Mox clarius discrimen, quod intercedit inter quæstiones, in quibus Z est quantitas vel determinata vel indeterminata, perspicietur; quando Problemata hujus generis sumus tractaturi. Pluribus modis autem tales quæstiones possunt variari, prout in maximi minimive formula $\int Z\,dx$, quantitas Z vel tantum est functio ejusmodi formulæ indeterminatæ Π, qualem contemplati sumus, vel insuper quantitates determinatas, x, y, p, q, r, s, &c. comprehendit. Deinde in Z etiam inesse poterunt plures ejusmodi formulæ integrales indefinitæ a se invicem diversæ. Ad hos autem diversos casus una regula, superioribus jam traditis addita, sufficere poterit. Præcipuum autem momentum positum est in ipsa formula indeterminata $\Pi = \int [Z]\,dx$, pro qua hîc posuimus esse $[Z]$ functionem determinatam; quod si autem hæc ipsa quantitas $[Z]$ denuo ejusmodi formulas integrales indefinitas complectatur, iterum peculiari solutione erit opus. Quin etiam ista complicatio formularum indeterminatarum in infinitum potest extendi; id quod eveniet si quantitas $[Z]$ denuo in se complectatur ipsam quantitatem Π, ita ut sit $d[Z] = [L]\,d\Pi + [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq + [R]\,dr +$ &c. tum enim ob $d\Pi = [Z]\,dx$, iterum considerari oportebit valorem $d[Z] = [L]\,d\Pi + [M]\,dx +$ &c. hicque progressus in infinitum continuabitur. Hinc autem methodus nascetur ea resolvendi Problemata, in quibus curva quæritur maximum minimumve habens valorem formulæ $\int Z\,dx$, quando quantitas Z non datur,

ut

ut hactenus, sive determinate sive indeterminate, sed tantum per æquationem differentialem, cujus integratio omnino non potest absolvi: cujusmodi quæstio est, si quæratur curva, in qua minimum sit expressio $\int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$, existente $dv = gdx - hv''dx\sqrt{(1+pp)}$: atque ejusmodi quæstionum resolutionem in hoc Capite quoque trademus.

PROPOSITIO II. PROBLEMA.

Fig. 4. **6.** *Si* Z *fuerit functio quantitatis indeterminatæ* Π, *ita ut sit* $dZ = L\,d\Pi$, *sitque* $\Pi = \int [Z]\,dx$, *existente* $d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + [R]dr +$ &c. *invenire curvam* az *quæ pro data abscissa* AZ *habeat valorem formulæ* $\int Z\,dx$ *maximum vel minimum.*

SOLUTIO.

Posita abscissa $AH = x$, applicata $Hh = y$, sit tota abscissa AZ, cui maximum minimumve respondere debet, $= a$, diviso igitur spatio HZ in elementa innumera infinite parva HI, IK, KL, LM, &c. debebit esse $\int Z\,dx + Z\,dx + Z'dx + Z''dx + Z'''dx +$ &c. donec ad extremum punctum Z perveniatur, maximum minimumve. Ad hoc efficiendum, quærendi sunt valores differentiales quos singuli hi termini a translatione puncti n in *ν* accipiunt, quorum summa, nihilo æqualis posita, dabit æquationem pro curva quæsita. Quoniam autem mutationem ab n*ν* oriundam non ultra H versus A porrigi ponimus, erit termini $\int Z\,dx$ valor differentialis nullus. Reliquorum terminorum valores differentiales reperientur, si ii differentientur, atque in differentialibus scribantur ea incrementa, quæ in Propositione præcedente invenimus, ex translatione puncti n in *ν* oriri. Erit autem

$$d.\,Z\,dx = L\,dx.\,d\Pi$$
$$d.\,Z'\,dx = L'\,dx.\,d\Pi'$$
$$d.\,Z''\,dx = L''\,dx.\,d\Pi''$$
$$d.\,Z'''\,dx = L'''\,dx.\,d\Pi'''$$
$$d.\,Z^{IV}\,dx = L^{IV}\,dx.\,d\Pi^{IV}$$

Quodſi jam loco differentialium $d\Pi$, $d\Pi'$, $d\Pi''$, $d\Pi'''$, &c. valores ſupra inventos ex translatione puncti n in ν ortos ſubſtituamus obtinebimus.

$$d.\,Z\,dx = 0.$$

$$d.\,Z'\,dx = n\nu.\,L'\,dx^2.\frac{[T]}{dx^3}$$

$$d.\,Z''\,dx = n\nu.L''\,dx^2\left(\frac{[S']}{dx^4} - \frac{4[T]+5d[T]}{dx^5}\right)$$

$$d.\,Z'''\,dx = n\nu.L'''\,dx^2\left(\frac{[R'']}{dx^3} - \frac{3[S']+4d[S']}{dx^4} + \frac{6[T]+15d[T]+10dd[T]}{dx^5}\right)$$

$$d.\,Z^{IV}\,dx = n\nu.L^{IV}\,dx^2\left(\frac{[Q''']}{dx^2} - \frac{2[R'']+3d[R'']}{dx^3} + \frac{3[S']+8d[S']+6dd[S']}{dx^4} - \frac{4[T]+15d[T]+20dd[T]+10d^3[T]}{dx^5}\right)$$

$$d.\,Z^{V}\,dx = n\nu.\,L^{V}\,dx^2\left(\frac{[P^{IV}]}{dx} - \frac{[Q''']+2d[Q''']}{dx^2} + \frac{[R'']+3d[R'']+3dd[R'']}{dx^3} - \frac{[S']+4d[S']+6dd[S']+4d^3[S']}{dx^4} + \frac{[T]+5d[T]+10dd[T]+10d^3[T]+5d^4[T]}{dx^5}\right)$$

$$d.\,Z^{VI}\,dx = n\nu.\,L^{VI}\,dx^2\left([N'] - \frac{d[P^{IV}]}{dx} + \frac{dd[Q''']}{dx^2} - \frac{d^3[R'']}{dx^3} + \frac{d^4[S']}{dx^4} - \frac{d^5[T]}{dx^5}\right)$$

$$d.\,Z^{VII}\,dx = n\nu.\,L^{VII}\,dx^2\left([N'] - \frac{d[P^{IV}]}{dx} + \frac{dd[Q''']}{dx^2} - \frac{d^3[R'']}{dx^3} + \frac{d^4[S']}{dx^4} - \frac{d^5[T]}{dx^5}\right)$$

&c.

Sequentium ſcilicet terminorum incrementa eadem hac lege progrediuntur. Addantur jam ſenorum priorum terminorum incrementa, prodibit terminorum $Z\,dx + Z'\,dx + Z''\,dx + Z'''\,dx + Z^{IV}\,dx + Z^{V}\,dx$ incrementum totale =

$$n\nu.dx^2\left(\frac{L^{V}[P^{IV}]}{dx} - \frac{[Q''']dL^{IV}+2L^{IV}d[Q''']}{dx^2} + \frac{[R'']ddL'''+3d[R'']dL'''+3L'''dd[R'']}{dx^3} - \frac{[S']d^3L''+4d[S']ddL''+6dL''dd[S']+4L''d^3[S']}{dx^4} + \ldots\right)$$

$$+\frac{[T]d^4L' + 5d[T]d^3L' + 10dd[T]ddL' + 10dL'd^3[T] + 5L'd^4[T]}{dx^5}\Big)$$

in qua expreſſione, quia omnes termini inter ſe ſunt homogenei, jam indices numerici negligi poterunt. Sequentium autem terminorum $L'''dx + L^{IV}dx +$ &c. omnium incrementum erit $=$

$$nv.dx\left([N'] - \frac{d[P'']}{dx} + \frac{dd[Q'']}{dx^2} - \frac{d^3[R'']}{dx^3} + \frac{d^4[S']}{dx^4} - \frac{d^5[T]}{dx^5}\right)$$

$(L'''dx + L^{IV}dx + L^{V}dx + L^{VI}dx +$ &c. uſque in $Z)$. Hic autem poſterior factor definietur per integrationem formulæ $\int L\,dx$, quæ reſpondet abſciſſæ indefinitæ $AH = x$; ponatur in hac formula poſt integrationem $x = a$, abeatque ea in H, erit H valor formulæ $\int L\,dx$ abſciſſæ toti propoſitæ AZ reſpondens; a qua ergo ſi auferatur $\int L\,dx$, remanebit $H - \int L dx$ valor portioni HZ vel NZ reſpondens, qui ergo loco $L'''dx + L^{IV}dx + L^{V}dx +$ &c. ſubſtitui poteſt. Quamobrem tandem formulæ $\int Z\,dx$ valor differentialis toti abſciſſæ AZ reſpondens erit $=$

$$nv.dx(H - \int L dx)\left([N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2} - \frac{d^3[R]}{dx^3} + \frac{d^4[S]}{dx^4} - \frac{d^5[T]}{dx^5}\right)$$

$$+nv.dx\left(L[P] - \frac{[Q]dL + 2Ld[Q]}{dx} + \frac{[R]ddL + 3d[R]dL + 3Ldd[R]}{dx^2}\right.$$

$$\left. - \frac{[S]d^3L + 4d[S]ddL + 6dLdd[S] + 4Ld^3[S]}{dx^3}\right.$$

$$\left. + \frac{[T]d^4L + 5d[T]d^3L + 10dd[T]ddL + 10dLd^3[T] + 5Ld^4[T]}{dx^4}\right)$$

qui ad hanc formam commodiorem reduci poteſt, ut ſit $=$

$$nv.dx\left([N](H - \int Ldx) - \frac{d.[P](H - \int Ldx)}{dx} + \frac{dd.[Q](H - \int Ldx)}{dx^2}\right.$$

$$\left. - \frac{d^3.[R](H - \int Ldx)}{dx^3} + \frac{d^4.[S](H - \int Ldx)}{dx^4} - \frac{d^5[T](H - \int Ldx)}{dx^5}\right);$$

qui valor differentialis, quouſque occaſio poſtulabit, ulterius continuari poterit: is autem, nihilo æqualis poſitus, dabit æquationem pro curva quæſita. Q. E. I.

Co-

COROLL. I.

7. Quoniam $H - \int L\,dx$ est valor formulæ $\int L\,dx$ respondens abscissæ portioni $AZ = a - x$, si ponatur $AZ = a - x = u$, erit $\int L\,du$ ille ipse valor $H - \int L\,dx$, quo opus est; siquidem $\int L\,du$ ita integretur, ut evanescat posito $u = 0$.

COROLL. II.

8. Quodsi igitur abscissarum initium capiatur in puncto Z; ita ut abscissa ZH ponatur $= u$, utque ubique ponatur $x = a - u$, prodibit æquatio pro curva inter coordinatas u & y; hujusque curvæ ea portio quæsito satisfaciet, quæ respondet abscissæ $AZ = a$. Interim notandum est cum in ipsa maximi minimive formula $\int Z\,dx$, tum in $\int [Z]\,dx$, abscissarum initium in puncto A capi debere.

COROLL. III.

9. Si ergo quæratur curva ad datam abscissam AZ relata, in qua maximum minimumve debeat esse $\int Z\,dx$; sitque Z functio quæcunque ipsius $\Pi = \int [Z]\,dx$, existente $dZ = L\,d\Pi$ & $d[Z] = [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq + [R]\,dr + \&c.$ habebitur pro curva quæsita ista æquatio:

$$0 = [N]\int L\,du - \frac{d.[P]\int L\,du}{dx} + \frac{dd.[Q]\int L\,du}{dx^2} - \frac{d^3[R]\int L\,du}{dx^3} + \&c.$$

ubi est $u = a - x$, & $\int L\,du$ denotat valorem formulæ $\int L\,dx$ portioni abscissæ $HZ = u$ respondentem.

COROLL. IV.

10. Possunt ergo vel bina abscissarum initia A & Z, binæque abscissæ $AH = x$, & $ZH = u$ considerari, quarum illa in integrali $\int [Z]\,dx$ seu Π, hæc vero in integrali $\int L\,dx$ spectari debet, vel unica tantum abscissa $AH = x$; quo casu, loco

Digitized by Google

$\int L\,du$ ſcribi debet $H - \int L\,dx$; denotante H valorem, quem præbet formula $\int L\,dx$, poſito $x = AH = a$.

COROLL. V.

11. Quia Z eſt functio ipſius Π tantum, ita ut nullas alias quantitates variabiles in ſe complectatur, ob $dZ = L\,d\Pi$, erit etiam L functio ipſius Π tantum.

COROLL. VI.

12. Si $[Z]$ eſſet functio ipſius x tantum; tum foret $\Pi = \int [Z]\,dx$ quantitas determinata, atque functio ipſius x, hincque etiam Z; ex quo maximum minimumve non inveniet locum. Idem oſtendit ſolutio; fiet enim $[N] = 0$, $[R] = 0$ &c. atque æquatio abit in identicam $0 = 0$.

SCHOLION I.

13. Occurrunt hîc nonnulli primarii caſus conſiderandi, quorum primus eſt, ſi fuerit $[Z]$ functio ipſarum x & y tantum; ita ut ſit $d[Z] = [M]\,dx + [N]\,dy$. Quod ſi nunc quæratur curva in qua maximum minimumve ſit formula $\int Z\,dx$ pro data abſciſſa $AZ = a$, exiſtente Z functione quacunque ipſius $\int [Z]\,dx = n$, ita ut ſit $dZ = L\,dn$; habebitur pro curva quæſita iſta æquatio $0 = [N](H - \int L\,dx)$; erit ergo vel $[N] = 0$ vel $H = \int L\,dx$, ſeu $L = 0$; quarum æquationum ſi vel altera vel utraque præbeat lineam curvam, ea non ſolum ſatisfaciet Problemati pro abſciſſa $AZ = a$, ſed etiam pro alia quacunque abſciſſa indefinita x: id quod inde colligitur, quod ex æquatione, quantitas H, quæ pendet ab abſciſſa determinata a, ex calculo exceſſerit. Quod autem ſpeciatim ad æquationem $L = 0$ attinet: quia L eſt functio ipſius Π ſeu $\int [Z]\,dx$, fiet $\int [Z]\,dx = \text{conſt.}$ determinatæ, quod niſi ſit $[Z] = 0$, fieri nequit: binæ igitur æquationes hoc caſu ſatisfacientes, erunt $[N] = 0$, atque $[Z] = 0$.

SCHO-

SCHOLION II.

14. Deinde vero considerari meretur casus quo $[N]$ evanescit; id quod evenit, si $[Z]$ fuerit functio ipsarum x, p, q, r, &c. non involvens y. Ponamus esse $[Z]$ functionem ipsarum x & p, atque $d[Z] = [M]dx + [P]dp$. Si igitur ponatur $\int [Z]dx = \Pi$, atque curva quæratur, in qua, pro abscissa definita $AZ = a$, maximum minimumve sit formula $\int Z dx$, existente Z functione ipsius Π, ita ut sit $dZ = L d\Pi$; orietur pro curva quæsita ista æquatio $0 = -\frac{d.[P](H - \int L dx)}{dx}$; ideoque *Const.* $= [P](H - \int L dx)$. Hæc vero constans, per integrationem ingressa, non est arbitraria; nam eam ita comparatam esse oportet, ut posito $x = a$, quo casu fit $\int L dx = H$, fiat $\frac{Const.}{[P]} = 0$. Hoc autem evenire non potest, nisi vel hæc constans ponatur $= 0$, vel quantitas $[P]$ ita comparata sit ut fiat $= \infty$, posito $x = a$. Priori casu habetur vel $[P] = 0$, vel $\int L dx = H$, hoc est $L = 0$, seu $\int [Z]dx = Const.$ seu potius $[Z] = 0$; posteriori casu autem, constans tamen pro arbitrio non accipi potest, nam determinabitur, ponendo $x = a - dx$, eo modo, quo expressiones quæ certis casibus indeterminatæ videntur definiri solent. Atque hinc perspicitur in hujusmodi Problematis numerum constantium arbitrariarum in solutionem ingredientium, cui æqualis sumi debet numerus punctorum, per quæ curvæ satisfacienti transeundum est, non ex gradu differentialium judicàri posse. Pervenietur enim sæpe, tollendo per differentiationem omnes formulas integrales, ad æquationem differentialem altioris gradus, a quo nequaquam Problematis determinatio per aliquot puncta pendebit.

EXEMPLUM I.

15. *Si denotet* Π *aream curvæ* $\int y\,dx$, *atque* Z *sit functio quæcunque ipsius* Π, *invenire curvam quæ, pro data abscissa* $= a$, *habeat valorem formulæ* $\int Z\,dx$ *maximum vel minimum.*

Quia eſt Z functio ipſius π; ſit $dZ = L\,d\pi$, erit L functio ipſius $\pi = \int y\,dx$. Deinde cum ſit $d\pi = y\,dx$; erit $[Z] = y$, & ob $d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp +$ &c. fiet $[M] = 0$, $[N] = 1$, $[P] = 0$, $[Q] = 0$, &c. unde pro curva quæſita hæc habebitur æquatio $0 = H - \int L\,dx$; ideoque $L = 0$. Hinc erit $\pi = \int y\,dx =$ conſtanti cuidam, porroque $y = 0$. Satisfacit ergo ſola linea recta in ipſum axem incidens; idque pro quacunque abſciſſa æque ac pro definita $= a$.

EXEMPLUM II.

16. *Si* π *denotet arcum curvæ* $= \int dx\sqrt{(1+pp)}$ *ejuſque functio quæcunque fuerit* Z; *invenire curvam, quæ, pro data abſciſſa* $AZ = a$, *habeat valorem formulæ* $\int Z\,dx$ *maximum vel minimum.*

Ob $dZ = L\,d\pi$, erit L functio ipſius arcus π; & ob $d\pi = dx\sqrt{(1+pp)}$, erit $[Z] = \sqrt{(1+pp)}$ & $[M] = 0$, $[N] = 0$, $[P] = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, $[Q] = 0$, &c. unde pro curva quæſita iſta habebitur æquatio: $0 = -d.\frac{p}{dx\sqrt{(1+pp)}}(H - \int L\,dx)$; hincque $C = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}(H - \int L\,dx)$: ubi conſtans C ita determinari debet, ut, poſito $x = a$, fiat $C = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} \times 0$; quare quia $\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ infinitum fieri nequit, neceſſe eſt ut ſit $C = 0$; ideoque vel $\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = 0$; vel $\int L\,dx = H$. Fiet ergo, ex poſteriore æquatione, $L = 0$, & $\pi =$ conſtanti cuidam: ex quo porro deducitur $d\pi = dx\sqrt{(1+pp)} = 0$, cui conditioni nullo modo ſatisfieri poteſt. Ex priore æquatione autem deducitur $p = 0$, ſeu $dy = 0$, quæ eſt æquatio pro linea recta axi AZ parallela, quæ quæſtioni pro abſciſſa quacunque ſatisfacit.

EXEM-

EXEMPLUM III.

17. *Denotet* Π *ſuperficiem ſolidi rotundi ex converſione curvæ* a h *circa axem* A Z *orti, quæ eſt ut* $\int y\,dx\sqrt{(1+pp)}$, *hujuſque ſuperficiei functio ſit quæcunque* Z, *invenire curvam, in qua pro data abſciſſa* A Z = a, *maximum minimumve ſit* $\int Z\,dx$.

Ob $dZ = L\,d\Pi$, erit L functio ipſius $\Pi = \int y\,dx\sqrt{(1+pp)}$; & ob $d\Pi = y\,dx\sqrt{(1+pp)}$ fiet $[Z] = y\sqrt{(1+pp)}$, & $d[Z] = dy\sqrt{(1+pp)} + \frac{ypdp}{\sqrt{(1+pp)}}$: unde erit $[M] = 0$; $[N] = \sqrt{(1+pp)}$; $[P] = \frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}}$; reliqui valores $[Q]$, $[R]$, $[S]$, &c. omnes erunt $= 0$. Quocirca pro curva quæſita iſta habebitur æquatio: $0 = (H - \int L\,dx)\sqrt{(1+pp)} - \frac{1}{dx}\,d.\,\frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}}(H - \int L\,dx)$. Ponatur, brevitatis gratia, $H - \int L\,dx = V$; erit $V\,dx\sqrt{(1+pp)} = d.\,\frac{ypV}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{Vpp\,dx}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{Vy\,dp}{(1+pp)^{3:2}} + \frac{yp\,dV}{\sqrt{(1+pp)}}$, ſeu $V\,dx = \frac{Vy\,dp}{1+pp} + ypdV = \frac{Vy\,dp}{1+pp} - ypL\,dx$, ob $dV = -L\,dx$. Ponamus eſſe $Z = \Pi$, ita ut maximum eſſe debeat $\int dx \int y\,dx\sqrt{(1+pp)}$, erit $L = 1$ & $\int L\,dx = x$, atque $V = a - x$, ob $H = a$. Erit $(a-x)\,dx = \frac{(a-x)y\,dp}{1+pp} - ypdx$. Sit $a - x = u$; erit $dx = -du$, & $dy = -pdu$, atque habebitur iſta æquatio, $0 = udu - ydy + \frac{uy\,dp}{1+pp}$, ſeu $u\,du - y\,dy - \frac{uy\,du\,ddy}{du^2 + dy^2} = 0$. Ponatur $u = e^t$ & $y = e^t z$: erit $du = e^t dt$, & $ddu = 0 = e^t(ddt + dt^2)$, ſeu $ddt = -dt^2$; porro $dy = e^t(dz + z\,dt)$ & $ddy = e^t(ddz + 2\,dt\,dz)$; quibus ſubſtitutis, oritur $dt =$

$dt - zdz - zzdt = \frac{zdt(ddz + 2dtdz)}{dt^2 + (dz + zdt)^2}$. Sit porro $ds = sdz$, erit $ddt = -s^2dz^2 = sddz + dsdz$, hincque $ddz = -sdz^2 - \frac{dsdz}{s}$. Habebitur ergo hæc æquatio; $sdz - zdz - szzdz = \frac{2zs^2dz - zds}{ss + (1+sz)^2}$; quæ quidem est differentialis primi gradus inter duas variabiles s & z tantum; verumtamen ultra integrationem non admittit. Multo minus igitur quicquam effici poterit, si in genere quæstionem consideremus.

SCHOLION III.

18. Hujus exempli casus, quo curvam investigavimus, in qua maximum minimumve sit $\int dx \int y\,dx \sqrt{(1+pp)}$, etsi inest duplex signum integrale, tamen etiam per methodum præcedentis Capitis potest resolvi; id quod ideo operæ pretium est ostendere, ut consensus utriusque methodi declaretur. Præcipue autem hoc opere nova via patefiet resolvendi plurima alia Problemata circa maxima & minima, quæ adhuc, quantum constat, non est tacta. Quæstio scilicet est, ut pro data abscissa $AZ = a$, fiat maximum minimumve hæc expressio $\int dx \int y\,dx \sqrt{(1+pp)}$, quæ transmutatur in hanc $x\int y\,dx \sqrt{(1+pp)} - \int xy\,dx \sqrt{(1+pp)}$. Ut hæc forma reddatur maximum minimumve, oportet ut ejus valor, pro abscissa $AZ = a$, idem sit pro ipsa curva quæsita az & pro eadem puncto n in ν translato. Ponamus ergo fieri $\int y\,dx \sqrt{(1+pp)} = A$, si ponatur $x = a$, atque eodem casu $\int xy\,dx \sqrt{(1+pp)} = B$. Jam, elementis mno in $m\nu o$ transmutatis, valor A augebitur suo valore differentiali, qui, per Caput præcedens, est $= n\nu . dx\left(\sqrt{(1+pp)} - \frac{1}{dx}\,d.\,\frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}}\right)$; per eadem præcepta autem quantitatis B valor differentialis prodit $= n\nu . dx\left(x\sqrt{(1+pp)} - \frac{1}{dx}\,d.\,\frac{xyp}{\sqrt{(1+pp)}}\right)$. Quamobrem formulæ propositæ $\int dx \int y\,dx \sqrt{(1+pp)}$, translato puncto n in ν, pro abscissa $AZ = a$,

$= a$, valor erit $= a\left(A + n\nu\,dx\left(\sqrt{(1+pp)} - d.\frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}}\right)\right.$
$\left. - B - n\nu\left(x\,dx\sqrt{(1+pp)} - d.\frac{xyp}{\sqrt{(1+pp)}}\right)\right.$, qui æqualis esse debet ejusdem formulæ valori naturali pro abscissa $= a$, non mutato puncto n, qui est $aA - B$. Hinc proveniet ista æquatio $(a - x)\,dx\sqrt{(1+pp)} - d.\frac{(a-x)yp}{\sqrt{(1+pp)}} = 0$; quæ omnino congruit cum æquatione in solutione Exempli inventa.

PROPOSITIO III. PROBLEMA.

19. *Existente* Π *functione integrali indeterminata* $\int [Z]\,dx$, *ita ut sit* $d[Z] = [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq + [R]\,dr + \&c.$ *sit* Z *functio quæcunque cum hujus quantitatis* Π. *tum quantitatum determinatarum* x, y, p, q, r, s, &c. *ita ut sit* $dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c.$ *invenire curvam* az, *quæ pro data abscissa* $AZ = a$, *habeat maximum minimumve valorem formulæ* $\int Z\,dx$.

SOLUTIO.

Augmentum $n\nu$, quod uni applicatæ Nn accedere concipitur, ita remotum a prima applicata Hh capiatur, ut nullam mutationem inferat in valorem formulæ $\int Z\,dx$ abscissæ AH respondentem, atque tantum hujus formulæ valores sequentibus post H abscissæ elementis respondentes mutationes patiantur, qui sunt $Z\,dx$, $Z'\,dx$, $Z''\,dx$, $Z'''\,dx$, &c. usque ad ultimum abscissæ elementum in Z. Horum igitur valorum incrementa a translatione puncti n in ν orta, si in unam summam conjiciantur, & nihilo æquales ponantur, dabunt æquationem pro curva quæsita. Incrementa autem horum valorum obtinebuntur eos differentiando, & loco differentialium eos valores scribendo, quos supra, tam in ultima Propositione præcedentis Capitis quam prima hujus, ex translatione n in ν oriri invenimus: ita erit

$$d.\,Z\,dx = dx(L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + \&c.)$$
$$d.\,Z'dx = dx(L'\,d\Pi' + M'dx + N'dy' + P'dp' + \&c.)$$
$$d.\,Z''dx = dx(L''d\Pi'' + M''dx + N''dy'' + P''dp'' + \&c.)$$
$$\&c.$$

Quod ſi nunc loco differentialium $d\Pi$, $d\Pi'$, $d\Pi''$ &c. dy, dy', dy'', &c. dp, dp', dp'', &c. dq, dq', dq'', &c. valores ſupra inventi ſubſtituantur, & eodem modo, quo ante uſi ſumus, in unam ſummam conferantur, prodibit formulæ $\int Z\,dx$ pro abſciſſa $AZ = a$ valor differentialis =

$$nv.\,dx\left([N](H - \int L\,dx) - \frac{d.[P](H - \int L\,dx)}{dx} + \frac{dd.[Q](H - \int L\,dx)}{dx^2}\right.$$
$$\left. - \frac{d^3.[R](H - \int L\,dx)}{dx^3} + \frac{d^4.[S](H - \int L\,dx)}{dx^4} - \&c.\right)$$
$$+\ nv.\,dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d\,dQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \&c.\right).$$

Atque ex hoc reſultabit æquatio pro curva quæſita hæc:

$$0 = [N](H - \int L\,dx) - \frac{d.[P](H - \int L\,dx)}{dx}$$
$$+ \frac{dd.[Q](H - \int L\,dx)}{dx^2} - \frac{d^3.[R](H - \int L\,dx)}{dx^3} + \&c.$$
$$+ N - \frac{dP}{dx} + \frac{d\,dQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \&c.$$

ubi notandum eſſe H valorem formulæ $\int L\,dx$, qui oritur poſito $x = a$. Q. E. I.

Coroll. I.

20. Regula igitur Capite præcedente inventa amplior eſt reddita; nunc enim curvam definire poſſumus, maximum minimumve habentem valorem formulæ $\int Z\,dx$, ſi Z non ſolum eſt functio quantitatum determinatarum x, y, p, q, r, &c. ſed etiam unam quantitatem integralem indefinitam $\int [Z]\,dx$ in ſe complectitur: dummodo $[Z]$ ſit functio determinata.

Co-

COROLL. II.

21. Quin etiam ſi plures hujuſmodi quantitates integrales indefinitæ fuerint in Z; ſolutio uſurpari poterit. Nam qualis expreſſio ex una ejuſmodi formula indefinita in valorem differentialem eſt ingreſſa, tales ex ſingulis, ſi plures affuerint, naſcentur & ad valorem differentialem accedent.

COROLL. III.

22. Quoniam Z hîc ponitur functio non ſolum quantitatum definitarum x, y, p, q, r &c. ſed etiam quantitatis indefinitæ $\Pi = \int [Z]\,dx$, ob $dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq +$ &c. etiam quantitates M, N, P, Q &c. hanc formulam integralem $\Pi = \int [Z]\,dx$ involvent; atque etiam ipſa quantitas L, niſi forte Π in Z unicam habeat dimenſionem.

COROLL. IV.

23. Hanc ob rem, in æquatione pro curva inventa, inerunt quantitates integrales duplicis generis, ſcilicet $\int L\,dx$, atque $\int [Z]\,dx$: ex quo, ſi æquatio inventa per differentiationem ab his formulis liberari debeat, ad multo altiorem differentialium gradum aſſurget, quam quidem ipſa forma oſtendit.

COROLL. V.

24. Pervenietur autem, eliminando has formulas integrales, ad æquationem differentialem duobus gradibus altiorem. Quod ſi enim æquatio reſultans, ſi evolvatur, ſit differentialis n gradus; tum primo ex ea definiatur valor formulæ $\int L\,dx$, & differentiatione inſtituta, devenietur ad æquationem differentialem $n+1$ graduum, in qua adhuc inerit formula $\int [Z]\,dx$, quæ ulterius reducta, & a formula $\int [Z]\,dx$ per differentiationem liberata, fiet differentialis gradus $n+2$.

SCHOLION I.

25. Etsi autem numerus punctorum, per quæ curva quæsita transire debet, a gradu *differentialitatis* pendet, tamen hoc casu non per numerum $n+2$ definiri potest. Æquatio enim hæc differentialis $n+2$ graduum, potestate quidem involvit $n+2$ constantes, verum ex non omnes sunt arbitrariæ. Una namque constans ex eo determinatur, quod integrale $\int [Z]\,dx$ obtinere debeat valorem, non vagum, sed talem qualem in quantitate Z obtinet, hoc est, qui evanescat posito $x=0$, siquidem hæc conditio fuerit in formula $\int Z\,dx$ assumta. Deinde pari modo una constans definitur formula $\int L\,dx$, quæ, uti posuimus, evanescere debet posito $x=0$. Quocirca tantum n supererunt constantes mere arbitrariæ, quæ totidem præbebunt puncta, quibus Problema determinabitur. Similiter igitur, uti in præcedente Capite, Problema, ut sit determinatum, ita erit proponendum, ut inter omnes curvas per data n puncta transeuntes ea determinetur, quæ pro data abscissa $x=a$ contineat valorem formulæ $\int Z\,dx$ maximum minimumve. Ad hanc igitur dijudicationem instituendam, æquatio inventa debebit evolvi; hoc est, omnes differentiationes indicatæ actu perfici debebunt; quo facto, patebit quanti gradus differentialia insint, ex hocque gradu habebitur numerus n. Quantum autem insuper circa hunc numerum n observare liceat, in Exemplis sequentibus videbimus.

EXEMPLUM I.

26. *Invenire curvam, quæ, pro data abscissa* $AZ=a$, *habeat valorem formulæ* $\int yx\,dx \int y\,dx$ *maximum vel minimum, integrali* $\int y\,dx$ *ita accipiendo, ut evanescat posito* $x=0$.

Erit igitur $n=\int y\,dx$, & $[Z]=y$; unde fiet $[N]=1$, reliquis litteris $[M]$, $[P]$, $[Q]$, &c. existentibus $=0$. Porro erit $Z=yx\Pi$ & $dZ=yx\,d\Pi+y\Pi\,dx+x\Pi\,dy$; ex quo habebitur $L=yx$; $M=y\Pi$ & $N=x\Pi$, $P=Q=R$, &c. $=0$.

Digitized by Google

$= 0$. Ex his formabitur pro curva quæſita iſta æquatio; $0 = (H - \int y\,x\,dx) + x\Pi$ ſeu $\int y\,x\,dx = H + x\int y\,dx$, ubi H eſt valor formulæ $\int y\,x\,dx$, qui prodit poſito $x = a$. Perſpicuum autem eſt hinc nullam pro aliqua linea curva æquationem oriri: differentiatione enim inſtituta, fit $dx\int y\,dx = 0$, porroque $y = 0$, quæ eſt æquatio pro linea recta in axem AZ incidente.

EXEMPLUM II.

27. *Invenire curvam, quæ, pro data abſciſſa* AZ = a, *habeat valorem formulæ* $\int y\,dx \int dx \sqrt{(1+pp)}$ *maximum vel minimum.*

Quoniam igitur eſt $\Pi = \int dx \sqrt{(1+pp)}$, erit $[Z] = \sqrt{(1+pp)}$ & $[P] = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$: Porro erit $Z = y\Pi$ & $L = y$; & $N = \Pi$; reliquæ litteræ omnes evaneſcunt. Hinc ergo reſultabit iſta æquatio pro curva quæſita: $0 = \frac{1}{dx} \times d.\frac{p(H - \int y\,dx)}{\sqrt{(1+pp)}} + \Pi$ ſeu $\Pi dx = d.\frac{(H - \int y dx)p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{(H - \int y dx)dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ypdx}{\sqrt{(1+pp)}}$; ergo $dx\int dx\sqrt{(1+pp)} = \frac{(H - \int y\,dx)\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ypdx}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quia igitur fit $\int y\,dx = H$, poſito $x = a$, eodem caſu fiet $\int dx\sqrt{(1+pp)} = \frac{-yp}{\sqrt{(1+pp)}} =$ arcui curvæ abſciſſæ a reſpondenti. Quæ conditio adimpleri debet per determinationem unius conſtantis, quæ per integrationem ingredietur. Eſt autem actu hæc æquatio differentialis ſecundi gradus, quæ vero bis debet differentiari, antequam a formulis integralibus $\int y\,dx$ & $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ liberetur: hocque modo ad gradum ſextum aſſurget, & poteſtate ſex conſtantes involvet; quarum duæ inde determinabuntur, quod facto $x = 0$ evaneſcere debent formulæ $\int y\,dx$ & $\int dx\sqrt{(1+pp)}$. Ipſa autem æquatio ita fiet intricata, ut ejus tractatio ſuſcipi non mereatur.

EXEMPLUM III.

28. *Invenire curvam, in qua pro data abſciſſa ſit* $\int \frac{dx}{p} \int y\,dx$ *maximum vel minimum.*

Hìc erit $\Pi = \int y\,dx$, & $[Z] = y$ & $[N] = 1$; deinde cum ſit $Z = \frac{\Pi}{p}$, erit $L = \frac{1}{p}$ & $P = -\frac{\Pi}{pp}$; reliquæ litteræ omnes evaneſcunt. Hinc ergo prodit iſta æquatio. $0 = H - \int \frac{dx}{p} + \frac{1}{dx} d.\frac{\Pi}{pp}$; ſeu $0 = H - \int \frac{dx}{p} + \frac{y}{pp} - \frac{2\Pi dp}{p^3 dx}$

Poſito ergo $x = a$, quo caſu fit $\int \frac{dx}{p} = H$; erit $y\,dx = \frac{2\Pi dp}{p}$. Differentietur ea æquatio, eritque $0 = -\frac{dx}{p} + \frac{dx}{p} - \frac{2y\,dp}{p^3} - \frac{2y\,dp}{p^3} + \frac{6\Pi dp^2}{p^4 dx} - \frac{2\Pi\,ddp}{p^3 dx}$. Seu $0 = 3\Pi dp^2 - 2ypdxdp - \Pi p\,ddp$; quæ æquatio commode fit integrabilis, ſi dividatur per $\Pi p\,dp$, prodit enim $0 = \frac{3dp}{p} - \frac{2y\,dx}{\Pi} - \frac{ddp}{dp}$, cujus integrale eſt $C = 3lp = 2l\Pi - l\frac{dp}{dx}$. Seu $C\Pi^2 dp = p^3 dx$; poſito ergo $x = a$, cum eſſe debeat $y\,dx = \frac{2\Pi dp}{p}$; erit ex hac æquatione $C\Pi y = 2p^2$, qua una conſtans definietur. Erit ergo $\Pi = \sqrt{\frac{p^3 dx}{C dp}} = \frac{2ypdxdp}{3dp^2 - pddp}$, ſeu $3dp^2 - pddp = \frac{2ydp\sqrt{dxdp}}{b\sqrt{bp}}$, quæ æquatio eſt differentialis tertii gradus, & propterea præter conſtantem b (poſuimus autem $\frac{1}{b^3}$ loco C), tres novas conſtantes involvit. Harum una determinabitur, eo quod, poſito $x = a$, fieri debeat $\frac{\Pi y}{b^3} = 2pp$; alia vero inde quod, poſito $x = 0$, eſſe debeat $\Pi = 0$, ſeu $\frac{p^3 dx}{dp} = 0$. Reliquæ

ſiquæ binæ conſtantes manent arbitrariæ, ac propterea curva quæſita per duo data puncta per quæ tranſeat, debet determinari.

EXEMPLUM IV.

29. *Invenire curvam* a z *ad abſciſſam* A Z = a *relatam, in qua ſit* $\int d x \frac{\int y x d x}{\int y d x}$ *maximum vel minimum.*

Hoc exemplum ideo afferre viſum eſt, ut appareat quomodo quæſtiones ejuſmodi ſint reſolvendæ, ſi duæ pluresve formulæ integrales indefinitæ adſint. Sit igitur $\int y x dx = \Pi$ & $\int y dx = \pi$: & poſito $d\Pi = [Z] dx$, & $d\pi = [z] dx$, erit $[Z] = yx$, & $[z] = y$. Quod ſi nunc littera minuſcula $[z]$ ſimili modo tractetur quo majuſcula $[Z]$, ita ut ſit $d[z] = [m] dx + [n] dy + [p] dp +$ &c. erit $[M] = y$ & $[N] = x$, itemque $[n] = 1$. Deinde cum ſit $Z = \frac{\Pi}{\pi}$, erit $dZ = \frac{d\Pi}{\pi} - \frac{\Pi d\pi}{\pi^2}$. Ponatur $\frac{1}{\pi} = L$ & $\frac{\Pi}{\pi^2} = l$; atque habebitur ob N & P, Q, R, &c. = 0, iſta pro curva quæſita æquatio, $0 = x\left(H - \int \frac{dx}{\pi}\right) - 1\left(b - \int \frac{\Pi dx}{\pi^2}\right)$, ubi ſit $\int \frac{dx}{\pi} = H$ & $\int \frac{\Pi dx}{\pi^2} = b$, ſi ponatur $x = a$. Cum igitur ſit $Hx - x\int \frac{dx}{\pi} = b - \int \frac{\Pi dx}{\pi^2}$ erit differentiando $H - \int \frac{dx}{\pi} - \frac{x}{\pi} = -\frac{\Pi}{\pi^2}$. Poſito ergo $x = a$, fieri debet $\Pi = \pi x$. Differentietur denuo, prodibitque $-\frac{2}{\pi} + \frac{xy}{\pi^2} = -\frac{yx}{\pi^2} + \frac{2\Pi y}{\pi^3}$, ſeu $xy - \pi = \frac{\Pi y}{x}$; hincque $\Pi = \pi x - \frac{\pi\pi}{y}$. Si porro differentiatio inſtituatur, habebitur $yx dx = \pi dx + yx dx - 2\pi dx + \frac{\pi\pi dy}{yy}$, ſeu $yy dx = \pi dy$, vel $\frac{y dx}{\pi} = \frac{dy}{y}$. Quoniam vero, poſito

posito $x = o$, fit $\pi = o$, fiet hoc casu $\frac{yy\,dx}{dy} = o$. Æquatio autem $\frac{y\,dx}{\pi} = \frac{dy}{y}$, ob $y\,dx = d\pi$, integrata dat $\pi = by$; ideoque facto $x = o$ evanescere debet y. Ex æquatione $\pi = by$ autem sequitur $y\,dx = b\,dy$; hincque $x = b\,ly - b\,lo$, siquidem $\pi = by$ evanescere debeat, posito $x = o$; quo casu fieret $y = o$, & curva abiret in rectam in axem AZ incidentem. Sin autem ponamus, posito $x = o$ valorem $\pi = \int y\,dx$ non evanescere oportere, sed fieri $= bc$, erit $x = b\,l\frac{y}{c}$, quæ est æquatio pro Curva logarithmica. Ad hanc penitus determinandam, quæratur valor $\Pi = \int y\,x\,dx$; quia est $y\,dx = b\,dy$, erit $y\,x\,dx = b\,x\,dy$, & $\Pi = b\,x\,y - b\,\pi + Const.$ seu $\Pi = bbyl\frac{y}{c} - bby + C$. Oporteat autem Π esse $= o$, posito $x = o$, seu $y = c$, erit $\Pi = bbyl\frac{y}{c} + bb(c - y)$. Jam ponatur $x = a$, erit $l\frac{y}{c} = \frac{a}{b}$, & $y = ce^{a:b}$: hoc vero casu, necesse est ut sit $\Pi = \pi x$, seu $abce^{a:b} + bbc - bbce^{a:b} = abce^{a:b}$, hincque $e^{a:b} = 1$, unde erit, vel $a = o$, vel $b = \infty$. Incommodum hoc inde oritur, quod posuimus fieri $\Pi = o$, facto $x = o$. Ponamus igitur, posito $y = g$, tum eo casu Π evanescere, erit $\Pi = bbyl\frac{y}{c} - bby + bbg - bbgl\frac{g}{c}$. Jam posito $x = a$, quo casu fieri debet $\Pi = \pi x = a\pi$; erit $abce^{a:b} - bbce^{a:b} + bbg - bbgl\frac{g}{c} = abce^{a:b}$, hincque $e^{a:b} = \frac{g}{c}\left(1 - l\frac{g}{c}\right)$, seu $b = \frac{a}{l\frac{g}{c}\left(1 - l\frac{g}{c}\right)}$ idcoque $x = \frac{a(ly - lc)}{lg\left(1 - l\frac{g}{c}\right) - lc}$. Quæ est æquatio curvam

penitus

Digitized by Google

penitus determinans, ita ut nullum curvæ punctum pro arbitrio accipi liceat.

SCHOLION II.

30. Per hoc igitur Problema, non ſolum illæ quæſtiones curvam pro data abſciſſa maximum minimumve habentem formulam $\int Z\,dx$ deſiderantes reſolvi poſſunt, in quibus Z præter quantitates determinatas x, y, p, q, r, s, &c. unam formulam integra'em $\pi = \int [Z]\,dx$ complectitur; ſed etiamſi plures ejuſmodi formulæ affuerint. Interim tamen notandum eſt has formulas integrales $\pi = \int [Z]\,dx$ in functione Z contentas, ita comparatas eſſe debere, ut $[Z]$ ſit functio determinata, hoc eſt functio quantitatum x, y, p, q, r, &c. nullas ultra formulas integrales involvens. Hanc ob rem, nunc inveſtigemus methodum reſolvendi ejuſmodi Problemata, quando iſta functio $[Z]$ non eſt determinata, ſed præter x, y, p, q, &c. formulam integralem novam $\pi = \int [z]\,dx$ involvit. Ne autem ſolutio nimium fiat prolixa, non ultra differentialia ſecundi gradus conſiderabimus. Jam enim intelligitur ſi ſolutio fuerit adornata uſque ad differentialia ſecundi gradus, tum per inductionem, ſolutionem ad quoſque ulteriores gradus extendi poſſe. Hunc in finem nobis erit L l prima applicata deſignanda per y, a qua tertia quæ ſequitur $Nn = y''$ particula $n\nu$ augeri concipiatur: Ex hoc augmento naſcentur ſequentia quantitatum y, p, & q, cum ſuis derivativis incrementa

$d.\ y = 0$	$d.\ p = 0$	$d.\ q = +\frac{n\nu}{dx^2}$
$d.\ y' = 0$	$d.\ p' = +\frac{n\nu}{dx}$	$d.\ q' = +\frac{2n\nu}{dx^2}$
$d.\ y'' = +n\nu$	$d.\ p'' = -\frac{n\nu}{dx}$	$d.\ q'' = +\frac{n\nu}{dx^2}$

quæ Tabella ſufficiet ad Problemata quæcunque reſolvenda, uti ex ſequente Propoſitione intelligetur.

PROPOSITIO IV. PROBLEMA.

31. *Sit* $\pi = \int [z]\,dx$ *&* $d[z] = [m]dx + [n]dy + [p]\,dp + [q]\,dq$, *atque quantitas* $[Z]$ *ita involvat formulam integralem* π, *ut sit* $d[Z] = Zd\pi + [M]dx + [N]dy + [P]\,dp + [Q]\,dq$. *Jam posito* $\Pi = \int [Z]\,dx$, *sit* Z *functio ipsarum* x, y, p, q, *itemque ipsius* Π, *ita ut sit* $dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq$. *His positis, oporteat definiri curvam* az, *qua, pro data abscissa* $AZ = a$, *habeat valorem formulæ* $\int Z\,dx$ *maximum vel minimum.*

SOLUTIO.

Ut in Scholio præcedente monuimus, est nobis abscissa $AL = x$, & applicata $Ll = y$; abscissæ autem $AL = x$ respondeat valor $\int Z\,dx$ qui a particula $n\nu$ non afficietur. Ex quo valor differentialis ex sequentibus abscissæ elementis determinari debebit, quibus respondebunt valores $Z\,dx$, $Z'\,dx$, $Z''\,dx$, $Z'''\,dx$, $Z^{IV}\,dx$, &c. usque ad ultimum abscissæ totius propositæ AZ elementum in Z. Invenientur autem singulorum horum terminorum valores differentiales per differentiationem; substituendo loco differentialium dy, dp, dq, valores paragrapho præcedenti indicatos. Erit igitur

$$d.Z\,dx = dx\left(L\,d\Pi + \frac{Q.n\nu}{dx^2}\right)$$

$$d.Z'\,dx = dx\left(L'd\Pi' + \frac{P'n\nu}{dx} - \frac{2Q'.n\nu}{dx^2}\right)$$

$$d.Z''\,dx = dx\left(L''d\Pi'' + N''.n\nu - \frac{P''.n\nu}{dx} + \frac{Q''.n\nu}{dx^2}\right)$$

$$d.Z'''\,dx = dx.L'''d\Pi'''$$

$$d.Z^{IV}\,dx = dx.L^{IV}d\Pi^{IV}$$

&c.

Supereſt igitur ut per $n\nu$ definiamus differentialia $d\Pi$, $d\Pi'$, $d\Pi''$, $d\Pi'''$ &c. hoc eſt valores differentiales quantitatum Π, Π', Π'', Π''' &c. Eſt vero $\Pi =$

Digitized by Google

$$\begin{aligned}
\pi &= \int [Z]\,dx \\
\pi' &= \int [Z]\,dx + [Z]\,dx \\
\pi'' &= \int [Z]\,dx + [Z]\,dx + [Z']\,dx \\
\pi''' &= \int [Z]\,dx + [Z]\,dx + [Z']\,dx + [Z'']\,dx \\
\pi^{IV} &= \int [Z]\,dx + [Z]\,dx + [Z']\,dx + [Z'']\,dx + [Z''']\,dx \\
&\quad \&c.
\end{aligned}$$

Ubi notandum eſt quantitatis $\int [Z]\,dx$ valorem differentialem eſſe $= 0$, eo quod particula n_ν nullam mutationem infert in abſciſſam A L ad quam $\int [Z]\,dx$ refertur. Tantum igitur terminorum differentialium $[Z]\,dx$, $[Z']\,dx$, $[Z'']\,dx$ &c. valores differentiales inveſtigari oportebit. Erit autem.

$$\begin{aligned}
d.[Z]\,dx &= dx\left([L]\,d\pi + \frac{[Q.]\,n\nu}{dx^2}\right) \\
d.[Z']\,dx &= dx\left([L']\,d\pi' + \frac{[P']\,n\nu}{dx} - \frac{2[Q'.]\,n\nu}{dx^2}\right) \\
d.[Z'']\,dx &= dx\left([L'']\,d\pi'' + [N''.]\,n\nu - \frac{[P''.]\,n\nu}{dx} + \frac{[Q''.]\,n\nu}{dx^2}\right) \\
d.[Z''']\,dx &= dx[L''']\,d\pi''' \\
d.[Z^{IV}]\,dx &= dx.\,[L^{IV}]\,d\pi^{IV}. \\
&\quad \&c.
\end{aligned}$$

Nunc porro definiendi ſunt valores differentiales quantitatum π, π', π'', π''', &c. per n_ν, quos loco $d\pi$, $d\pi'$, $d\pi''$, &c. ſubſtitui oportet. Cum autem ſit $\pi = \int [z]\,dx$, & in $[z]$ differentialia ſecundum gradum ſuperantia non ineſſe ponantur, fiet valor differentialis ipſius π, ſeu $d\pi = 0$, ad ſequentium autem quantitatum π', π'', π''' &c. valores differentiales inveniendos, notaſſe conveniet eſſe

$$\begin{aligned}
\pi &= \int [z]\,dx \\
\pi' &= \int [z]\,dx + [z]\,dx \\
\pi'' &= \int [z]\,dx + [z[dx + [z']\,dx \\
\pi''' &= \int [z]\,dx + [z]\,dx + [z']\,dx + [z'']\,dx \\
\pi^{IV} &= \int [z]\,dx + [z]\,dx + [z']\,dx + [z'']\,dx + [z''']\,dx \\
&\quad \&c.
\end{aligned}$$

Erit autem

$$d.[z]dx = nv.dx\,\frac{[q]}{dx^2}$$
$$d.[z']dx = nv.dx\left(\frac{[p']}{dx} - \frac{2[q']}{dx^2}\right)$$
$$d.[z'']dx = nv.dx\left([u''] - \frac{[p'']}{dx} + \frac{[q'']}{dx^2}.\right)$$
$$d.[z''']dx = 0$$
$$d.[z^{IV}]dx = 0$$
&c.

Ex his itaque obtinebitur

$$d.\pi = 0$$
$$d.\pi' = nv.dx.\frac{[q]}{dx^2}$$
$$d.\pi'' = nv.dx\left(\frac{[p']}{dx} - \frac{[q]}{dx^2} - \frac{2d[q]}{dx^2}\right)$$
$$d.\pi''' = nv.dx\left([u''] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2}\right)$$
$$d.\pi^{IV} = nv.dx\left([u^{IV}] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2}\right)$$
$$d.\pi^{V} = nv.dx\left([u^{V}] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2}\right)$$

omnesque sequentes valores inter se erunt æquales. Quod si jam hi valores inventi substituantur, erit

$$d.[Z]dx = nv.dx.\frac{[Q]}{dx^2}$$
$$d.[Z']dx = nv.dx\left(\frac{[L'][q]}{dx} + \frac{[P']}{dx} - \frac{2[Q]}{dx^2}\right)$$
$$d.[Z'']dx = nv.dx\left([L'']dx\left(\frac{[p']}{dx} - \frac{[q] - 2d[q]}{dx^2}\right) + [N''] - \frac{[P'']}{dx} + \frac{[Q'']}{dx^2}\right)$$

d,

$$d.[Z'''] dx = m.dx.[L'''] dx ([n''] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2})$$
$$d[Z^{IV}] dx = m.dx.[L^{IV}] dx ([n''] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2})$$
$$d.[Z^{V}] dx = nv.dx\,[L^{V}] dx ([n''] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2})$$

&c.

Hinc porro deducitur:

$$d\,\Pi = 0$$
$$d.\Pi' = nv.dx.\frac{[Q]}{dx^2}$$
$$d.\Pi'' = nv.dx([L'] dx.\frac{[q]}{dx^2} + \frac{[i']}{dx} - \frac{[Q] + 2d[Q]}{dx^2})$$
$$d.\Pi''' = nv.dx\,([L''][p'] - \frac{[q]d[L'] + 2[L']d[q]}{dx} + [N'] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2})$$
$$d.\Pi^{IV} = nv.dx([L'''] dx([n''] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2})$$
$$+[L''][p] - \frac{[q]d[L'] + 2[L']d[q]}{dx} + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2})$$
$$d.\Pi^{V} = nv.dx(([L'''] dx + [L^{IV}] dx)([n''] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2})$$
$$+[L''][p] - \frac{[q]d[L'] + 2[L']d[q]}{dx} + [N^{V}] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2})$$

&c.

Ex his jam orientur sequentes determinationes:

$$d.Z\,dx = m.dx.\frac{Q}{dx^2}$$
$$d.Z'\,dx = m.dx(L'dx.\frac{[Q]}{dx^2} + \frac{P'}{dx} - \frac{2Q'}{dx^2})$$
$$d.Z''\,dx = m.dx(L''dx([L'] dx.\frac{[q]}{dx^2} + \frac{[P']}{dx} - \frac{[Q] + 2d[Q]}{dx^2})$$
$$+N'' - \frac{P''}{dx} + \frac{Q''}{dx^2})$$

Digitized by Google

$$d.Z''dx = nv.dx.L'''dx([L''][p'] - \frac{[q]d[L'] + 2[L']d[q]}{dx} + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2})$$

$$d.Z'''dx = nv.dx\,L^{IV}dx([L'''']dx([n''] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2})$$
$$+[L''][p'] - \frac{[q]d[L] + 2[L]d[q]}{dx} + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2})$$

$$d.Z^{IV}dx = nv.dx.L^{V}dx(([L'''']dx + [L^{V}]dx)([n^{*}] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2})$$
$$+[L''][p'] - \frac{[q]d[L'] + 2[L']d[q]}{dx} + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2})$$

$$d.Z^{V}dx = nv.dx.L^{VI}dx(([L'''']dx + [L^{V}]dx + [L'']dx)([n''] - \frac{d[p']}{dx} +$$
$$\frac{dd[q]}{dx^2}) + [L''][p'] - \frac{[q]d[L'] + 2[L']d[q]}{dx} + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2})$$

&c.

Ut hi valores omnes eo commodius ad ſe invicem addi queant, ponamus brevitatis gratia $[b] = [n''] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2} = [n] - \frac{d[p]}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2}$; & $[H] = [L][p] - \frac{[q]d[L] + 2[L]d[q]}{dx} + [N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2}$: eritque ſumma omnium, hoc eſt valor differentialis formulæ propoſitæ $\int Z\,dx$, ut ſequitur.

$$nv.dx(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}) + nv.dx(L[P] - \frac{[Q]dL - 2Ld[Q]}{dx})$$
$$+nv.dx.L[L][q] + nv.dx.[H](L'''dx + L^{IV}dx + L^{V}dx + \&c.\text{ in } Z) + nv.dx.[b](L^{IV}dx.[L''']dx + L^{V}dx([L'''']dx + [L^{V}]dx) + L^{VI}dx([L'''']dx + [L^{V}]dx + [L']dx) + L^{VII}dx([L'''']dx + [L^{V}]dx + [L']dx + [L'']dx) + \&c.)$$

Binæ igitur hic habentur ſeries infinitæ, a termino L1 uſque ad Zz progredientes, quarum illius $L'''dx + L^{IV}dx + L^{V}dx + \&c.$ ſumma exprimi poteſt per $H - \int L\,dx$, denotante H valorem ipſius $\int L\,dx$, poſito $x = a$. Quo autem valorem alterius ſeriei inveſtigemus, ponatur ejus ſumma $= S$, ita ut ſit $S = L^{V}dx.[L''']$

$[L'''] dx + L^{V} dx ([L'''] dx + [L^{IV}] dx) +$ &c. Sumatur valor ſequens $S' = S + dS$, erit $S + dS = L^{V} dx . [L^{IV}] dx + L^{VI} dx ([L^{IV}] dx + [L^{V}] dx) +$ &c. qui ab illo ſubtractus relinquet, $- dS = L^{IV} [L'''] dx^2 + L^{V} [L'''] dx^2 + L^{VI} [L'''] dx^2 +$ &c. ſeu $- dS = [L'''] dx (L^{IV} dx + L^{V} dx + L^{VI} dx +$ &c.) ideoque $- dS = [L'''] dx (H - \int L dx)$, & integrando $S = G - \int [L] dx (H - \int L dx)$, conſtante G ita aſſumta, ut fiat $S = 0$ ſi ponatur $x = a$. His inventis fiet valor differentialis formulæ propoſitæ $\int Z dx = nv . dx (N$

$$- \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} + L[P] - \frac{[Q] dL + 2 L d[Q]}{dx} + L[L][q]$$

$$+ (H - \int L dx) ([L][p] - \frac{[q] d[L] + 2[L] d[q]}{dx}$$

$$+ [N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2}) + (G - \int [L] dx (H - \int L dx))$$

$$([n] - \frac{d[p]}{dx} + \frac{dd[q]}{dx^2})).$$

Hæc expreſſio autem in ſequentem formam tranſmutari poteſt, ex qua facilius valor differentialis formari poterit, ſi differentialia altiorum graduum quam ſecundi, tam in Z quam in $[Z]$ & $[z]$ inſint. Erit ſcilicet formulæ $\int Z dx$ valor differentialis abſciſſæ $AZ = a$ reſpondens

$$= nv . dx (N - \frac{dP}{dx} + \frac{d\,dQ}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \frac{d^4 S}{dx^4} -$$ &c.)

$$+ nv . dx ([N] (H - \int L dx - \frac{d.[P](H - \int L dx)}{dx} + \frac{dd.[Q](H - \int L dx)}{dx^2}$$

$$- \frac{d^3.[R](H - \int L dx)}{dx^3} + \frac{d^4.[S](H - \int L dx)}{dx^4} -$$ &c.) $+ n_{\gamma} . dx$

$$([n](G - \int [L] dx (H - \int L dx)) - \frac{d.[p](G - \int [L] dx (H - \int L dx))}{dx}$$

$$+ \frac{dd.[q](G - \int [L] dx (H - \int L dx))}{dx^2} - \frac{d.^3[r](G - \int [L] dx (H - \int L dx))}{dx^3}$$

+ &c.). Invento autem valore differentiali, ſi is ponatur $= 0$, habebitur æquatio pro curva quæſita. *Q. E. I.*

Co-

Digitized by Google

COROLL. I.

32. Inventus igitur est valor differentialis pro formula $\int Z\,dx$ latius patente, quam quidem in Propositione est assumta: scilicet si fuerit $dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dR$ + &c. atque existente $d\Pi = [Z]\,dx$, si sit $d[Z] = [L]\,d\pi + [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq + [R]\,dr$ + &c. itemque si posito $d\pi = [z]\,dx$ fuerit $d[z] = [m]\,dx + [n]\,dy + [p]\,dp + [q]\,dq + [r]\,dr$ + &c. Quoticunque nimirum gradus differentialia insint in quantitatibus Z, $[Z]$, & $[z]$ solutio data inserviet.

COROLL. II.

33. Quod si ponatur $H - \int L\,dx = T$, & $G - \int [L]\,dx$ $(H - \int L\,dx) = V$, erit valor differentialis

$$= n\nu.\,dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d\,dQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \&c.\right)$$
$$+ n\nu.\,dx\left([N]\,T - \frac{d.[P]T}{dx} + \frac{dd.[Q]T}{dx^2} - \frac{d^3[R]T}{dx^3} + \&c.\right)$$
$$+ n\nu.dx\left([n]V - \frac{d.[p]V}{dx} + \frac{dd.[q]V}{dx^2} - \frac{d^3[r]V}{dx^3} + \&c.\right)$$

COROLL. III.

34. Hinc igitur æquatio pro curva quæsita erit hæc, $0 = N + [N]\,T + [n]\,V - \frac{d(P+[P]T+[p]V}{dx} + \frac{dd(Q+[Q]T+[q]V)}{dx^2} - \frac{d^3(R+[R]T+[r]V)}{dx^3}$ + &c. cujus progressionis lex, si forte opus sit pluribus terminis, sponte patet.

COROLL. IV.

35. Quin etiam hinc resolvi poterunt ejusmodi Problemata, in quibus Z non unam, sed plures istiusmodi formulas integrales

Digitized by Google

les indefinitas π in ſe complectitur; vel etiam ſi [*Z*] plures ejuſmodi formulas $\pi = \int [z]\,dx$ in ſe contineat.

COROLL. V.

36. Denique, etſi poſuimus eſſe [*z*] functionem determinatam, tamen per inductionem hinc modus patet valorem differentialem formandi, ſi ulterius [*z*] in ſe contineat formulam integralem indefinitam.

SCHOLION.

37. Latiſſime igitur ſolutio hujus Problematis patet, quia non ſolum precedentia Problemata omnia in ſe complectitur, atque ipſi caſui propoſito ſatisfacit, verum etiam per inductionem ad caſus qualeſcunque magis intricatos accommodari poteſt. Quod ut facilius percipiatur, ponamus in [*z*] inſuper ineſſe formulam integralem $\pi = \int \zeta\,dx$, ita ut ſit $\zeta = [l]\,d\pi + [m]\,dx + [n]\,dy + [p]\,dp + [q]\,dq +$ &c. exiſtente $d\zeta = \mu\,dx + \nu\,dy + \Phi\,dp + \chi\,dq +$ &c. Jam ad valorem differentialem determinandum, præter quantitates integrales binas *T* & *V*, tertia debet definiri *W*, ita comparata ut ſit $W = F - \int [l]\,dx\,(G - \int [L]\,dx\,(H - \int L\,dx))$ quæ evaneſcat poſito $x = a$. Hocque facto, erit valor differentialis $= n\nu.dx\,(N + [N]T + [n]V + \nu W - \frac{d(P+[P]T+[p]V+\Phi W)}{dx} + \frac{dd.(Q+[Q]T+[q]V+\chi W)}{dx^2} -$ &c.) Quamobrem neque quidem maximi minimive formula excogitari poterit, quæ non in ſolutione eſſet contenta, aut ex talibus formulis compoſita, ad quas iſta ſolutio patet. Quinetiam liceret hanc expreſſionem in infinitum extendere, ſi quælibet formula indeterminata aliam novam formulam integralem indefinitam in ſe complectatur; neque difficultas ulla adeſſet, niſi in characterum ſufficienti numero ſuppeditando. Quæ cum ulterius proſequi non ſit neceſſe, unicum caſum principalem evolvere conveniet, quo

in formula $\int [Z]\,dx$, quæ valorem ipsius Π præbet, ipsa quantitas $[Z]$ denuo Π involvit. Hoc enim casu complexio istiusmodi formularum integralium actu in infinitum progreditur; namque si sit $d[Z] = [L]\,d\Pi + [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq +$ &c. erit hic iterum $d\Pi$, quod ante fuerat $d\pi$, & quoniam est $d\Pi = [Z]\,dx$, denuo eadem æquatio $d[Z] = [L]\,d\Pi + [M]\,dx + [N]\,dy +$ &c. recurret, atque ita tractatio formularum integralium nusquam abrumpetur. Casum igitur hunc, cum quia insignem nobis afferet usum, tum quia concinnam admittit solutionem, pertractabimus.

PROPOSITIO V. PROBLEMA.

38. *Si* Π *aliter non detur nisi per æquationem differentialem* $d\Pi = [Z]\,dx$, *in qua* $[Z]$. *præter quantitates ad curvam pertinentes* x, y, p, q, r, &c. *ipsam quantitatem* Π *complectatur, ita ut sit* $d[Z] = [L]\,d\Pi + [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq +$ &c. *Sit* Z *functio quæcunque ipsius* Π *& ipsarum* x, y, p, q, &c. *ita ut sit* $dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq +$ &c. *invenire curvam, in qua, pro data abscissa* $AZ = a$, *maximum minimumve sit formula* $\int Z\,dx$.

Fig. 4

SOLUTIO.

Ponamus differentialia, quæ tam in Z quam in $[Z]$ insunt, secundum gradum non excedere, ita ut particula nv ultra abscissæ punctum L versus initium nullam mutationem inferat. Solutio enim nihilominus hinc poterit maxime generalis confici. Sit igitur abscissa $AZ = x$, & applicata $Ll = y$, patietur $\int Z\,dx$ ab adjecta particula nv applicatæ $Nn = y''$ nullam mutationem, ejusque valor differentialis erit $= 0$. Quamobrem valor differentialis formulæ $\int Z\,dx$, quatenus ad totam abscissam AZ extenditur, colligi debebit ex elementis $Z\,dx$, $Z'\,dx$, $Z''\,dx$, $Z'''\,dx$, &c. Singulorum autem horum elementorum valores differentiales invenientur, si ea differentientur, & loco differentialium dy, dy', dy'', dp, dp', dp'', & dq, dq', dq'' valores

valores §. 30 indicati ſubſtituantur. Quoniam autem inſuper in hæc differentialia ingrediuntur $d\Pi$, $d\Pi'$, $d\Pi''$, &c. ponamus eorum valores ex nv oriundos tantiſper, donec eos inveniamus, eſſe hos :

$$\begin{array}{l|l|l} d\Pi = nv.\ \alpha & d\Pi''' = nv.\ \delta & d\Pi^{VII} = nv.\ \eta \\ d\Pi' = nv.\ \mathfrak{G} & d\Pi^{IV} = nv.\ \varepsilon & d\Pi^{VIII} = nv.\ \vartheta \\ d\Pi^{V} = nv.\ \gamma & d\Pi^{V} = nv.\ \zeta & \text{\&c.} \end{array}$$

Hinc itaque erunt valores differentiales

$$d.Z\,dx = nv.\,dx\,(L\alpha + \frac{Q}{dx^2})$$
$$d.Z'\,dx = nv.\,dx\,(L'\mathfrak{G} + \frac{P'}{dx} - \frac{2Q'}{dx^2})$$
$$d.Z''\,dx = nv.\,dx\,(L''\gamma + N'' - \frac{P''}{dx} + \frac{Q''}{dx^2})$$
$$d.Z'''\,dx = nv.\,dx\,L'''\delta$$
$$d.Z^{IV}\,dx = nv.\,dx\,L^{IV}\varepsilon$$
$$d.Z^{V}\,dx = nv.\,dx.\,L^{V}\zeta$$
$$\text{\&c.}$$

Ut nunc valores litterarum α, $\mathfrak{G}$, γ, δ, ε, &c. definiamus, notandum eſt eſſe $d\Pi$, $d\Pi'$, $d\Pi''$, &c. valores differentiales quantitatum Π, Π', Π'', &c. Eſt vero

$$\Pi = \int [Z]\,dx$$
$$\Pi' = \int [Z]\,dx + [Z]\,dx$$
$$\Pi'' = \int [Z]\,dx + [Z]\,dx + [Z']\,dx$$
$$\Pi''' = \int [Z]\,dx + [Z]\,dx + [Z']\,dx + [Z'']\,dx$$
$$\text{\&c.}$$

ubi $\int [Z]\,dx$, per hypotheſin, a particula nv non afficitur. Valores igitur differentiales formularum $[Z]\,dx$, $[Z']\,dx$, $[Z'']\,dx$ &c. ſunt inveſtigandi, qui erunt

Digitized by Google

$$d.[Z]dx = nv.dx([L]\alpha + \frac{[Q]}{dx^2})$$
$$d.[Z']dx = nv.dx([L']\mathfrak{G} + \frac{[P]}{dx} - \frac{2[Q']}{dx^2})$$
$$d.[Z'']dx = nv.dx([L'']\gamma + [N'] - \frac{[P'']}{dx} + \frac{[Q'']}{dx^2})$$
$$d.[Z''']dx = nv.dx[L''']\delta$$
$$d.[Z^{IV}]dx = nv.dx.[L^{IV}]\varepsilon$$
$$d.[Z^{V}]dx = nv.dx.[L^{V}]\zeta$$
&c.

Ex his igitur erit ut fequitur

$$d\Pi = \alpha$$
$$d\Pi' = nv.dx([L]\alpha + \frac{[Q]}{dx^2})$$
$$d\Pi'' = nv.dx.([L]\alpha + [L']\mathfrak{G} + \frac{[P']}{dx} - \frac{[Q]+2d[Q]}{dx^2})$$
$$d\Pi''' = nv.dx([L]\alpha + [L']\mathfrak{G} + [L'']\gamma + [N'] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2})$$
$$d\Pi^{IV} = nv.dx[L]\alpha + [L']\mathfrak{G} + [L'']\gamma + [L''']\delta + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2})$$
$$d\Pi^{V} = nv.dx([L]\alpha + [L']\mathfrak{G} + [L'']\gamma + [L''']\delta + [L^{IV}]\varepsilon + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2})$$
&c.

His comparatis cum valoribus affumtis, eris

$$\alpha = 0$$
$$\mathfrak{G} = [L]\alpha dx + \frac{[Q]}{dx}$$
$$\gamma = dx([L]\alpha + [L']\mathfrak{G} + \frac{[P']}{dx} - \frac{[Q]+2d[Q]}{dx^2})$$
$$\delta =$$

Digitized by Google

$$\delta = dx\,([L]\alpha + [L']\beta + [L'']\gamma + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2})$$

$$\varepsilon = dx\,([L]\alpha + [L']\beta + [L'']\gamma + [L'''']\delta + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2})$$

&c.

Ex hiſque æquationibus elicitur :

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{[Q]}{dx}$$

$$\gamma = [L'][Q] + [P'] - \frac{[Q] + 2d[Q]}{dx}$$

$$\delta = [L'][Q] + [L''][L'][Q]dx + [L''][P']dx - [L''][Q] - 2[L'']d[Q] + [N'']dx - d[P'] + \frac{dd[Q]}{dx}$$

$$\text{ſeu } \delta = [L''][L'][Q]dx + [L''][P']dx - [Q]d[L'] - 2[L'']d[Q] + [N'']dx - d[P'] + \frac{dd[Q]}{dx}$$

qui valor ipſius δ notetur, eritque porro

$$\varepsilon = \delta(1 + [L''']dx)$$

$$\zeta = \delta(1 + [L''']dx)(1 + [L'']dx)$$

$$\eta = \delta(1 + [L''']dx)(1 + [L'']dx)(1 + [L']dx)$$

&c.

Cognitis his valoribus, erit valor differentialis elementis $Zdx + Z'dx + Z''dx$ reſpondens

$$= \pi v.\,dx\,(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} + L[L][Q] + L[P] - \frac{[Q]dL + 2Ld[Q]}{dx})$$

. Sequentium autem elementorum omnium uſque ad Z valor differentialis, ſi ponatur $V = [L^2][Q] + [L]$

$+[L][P] - \frac{[Q]d[L]+2[L]d[Q]}{dx} + N - \frac{d[P]}{dx} + \frac{ddd[Q]}{dx}$, ſeu $\delta = V dx$, erit ſequens: $nv.dx(L'''dx + L^{IV}dx(1+[L''']dx) + L^{IV}dx(1+[L''']dx)(1+[L^{IV}]dx) + L^{V}dx(1+[L''']dx)(1+[L^{IV}]dx)(1+[L^{V}]dx) + \&c.)V$.

Quamobrem hujus ſeriei ſumma eſt indaganda; hunc in finem, ſcribamus L loco L''', & $[L]$ loco $[L''']$, ſitque ſumma, quam quærimus, $= S$: erit $S = Ldx + L'dx(1+[L]dx) + L''dx(1+[L]dx)(1+[L']dx) + L'''dx(1+[L]dx)(1+[L']dx)(1+[L'']dx) + \&c.$ Jam ipſius S ſumatur valor ſequens $S' = S + dS$ erit $S + dS = L'dx + L''dx(1+[L']dx) + L'''dx(1+[L']dx)(1+[L'']dx) + \&c.$ Hincque $-dS = Ldx + L'[L]dx^2 + [L]dx.L''dx(1+[L'']dx) + [L]dx.L'''dx(1+[L']dx)(1+[L'']dx) + \&c.$ quæ ſeries cum ad priorem reduci queat, erit $-dS = Ldx + S'[L]dx$, ſive ob $S' = S$, $dS + S[L]dx = -Ldx$; quæ integrata dat $e^{\int [L]dx} S = C - \int e^{\int [L]dx} L dx$, quæ conſtans C ita debet accipi, ut poſito $x = a$ fiat $S = 0$. Hanc ob rem erit valor illius ſeriei $S = e^{-\int [L]dx}(C - \int e^{\int [L]dx} L dx)$. Ex his igitur formulæ propoſitæ $\int Z dx$ orietur ſequens valor differentialis: $nv.dx(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} + L[L][Q] + L[P] - \frac{[Q]dL+2LD[Q]}{dx} + S([L^2][Q] + [L][P] - \frac{[Q]d[L]+2[L]d[Q]}{dx} + [N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{ddd[Q]}{dx^2}))$, qui tranſmutatur in hanc formam commodiorem, $nv.dx(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} + [N]S - \frac{d.[P]S}{dx} + \frac{ddd.[Q]S}{dx^2})$. Hinc autem formari poteſt valor differentialis formulæ $\int Z dx$, ſi tam in Z quam in $[Z]$ differentialia

Digitized

tialia ad gradum quemcunque assurgant. Ad hoc efficiendum, sit valor formulæ integralis $\int e^{\int [L]\,dx} L\,dx$, quem obtinet, si $x = a$ ponatur, $= H$, ac scribatur, brevitatis ergo, V loco hujus expressionis $e^{-\int [L]\,dx}(H - \int e^{\int [L]\,dx} L\,dx)$, eritque valor differentialis $= \pi\nu . dx^{\cdot}(N + [N]V - \frac{d.(P+[P]V)}{dx} + \frac{dd(Q+[Q]V)}{dx^2} - \frac{d^3(R+[R]V)}{dx^3} + \text{&c.})$ Atque hinc pro curva quæsita orietur ista æquatio, $0 = N + [N]V - \frac{d(P+[P]V)}{dx} + \frac{dd(Q+[Q]V)}{dx^2} - \frac{d^3(R+[R]V)}{dx^3} + \frac{d^4(S+[S]V)}{dx^4} - \text{&c.}$ *Q. E. I.*

Coroll. I.

39. Inservit igitur ista propositio ejusmodi Problematibus resolvendis, in quibus maximi minimive formula $\int Z\,dx$ talem in se continet quantitatem π, quæ nequidem formula integrali ex quantitatibus ad curvam pertinentibus x, y, p, q, r, &c. exhiberi potest, sed cujus determinatio pendet a resolutione æquationis differentialis cujuscunque. Habetur enim $d\pi = [Z]\,dx$, atque $[Z]$ ipsam quantitatem π utcunque in se complecti ponitur.

Coroll. II.

40. Casus hic notari meretur, quo est $L = [L]$, quippe quo fit formula $\int e^{\int [L]\,dx} L\,dx$ integrabilis, integrali existente $= e^{\int [L]\,dx}$. Quod si ergo, posito $x = a$, abeat $e^{\int [L]\,dx}$ in H, fiet $V = He^{-\int [L]\,dx} - 1$.

COROLL. III.

41. Casus hic potissimum locum habet, quando curva quæritur, in qua sit ipsa formula $\Pi = \int [Z]\,dx$ maximum vel minimum. Tum enim fit $Z = [Z]$, & hinc $L = [L]$, $M = [M]$, $N = [N]$ &c. Hinc itaque erit valor differentialis $= nv.\,dx\,(H[N]\,e^{-\int [L]\,dx} - \frac{d.\,H\,[P]\,e^{-\int [L]\,dx}}{dx} + \frac{dd.\,H[Q]\,e^{-\int [L]\,dx}}{dx^2} -$ &c. Atque æquatio pro curva erit $0 = [N]\,e^{-\int [L]\,dx} - \frac{d.[P]\,e^{-\int [L]\,dx}}{dx} + \frac{dd.[Q]\,e^{-\int [L]\,dx}}{dx^2} -$ &c.

COROLL. IV.

42. Quia ex hac æquatione quantitas H a data abscissa $AZ = a$ pendens per divisionem est egressa; patet his casibus curvam uni abscissæ satisfacientem, eandem pro omni alia abscissa esse satisfacturam: ita ut hæc Problemata similia sint iis, in quibus quantitas Z est functio determinata.

COROLL. V.

43. Si ergo quantitas $\Pi = \int [Z]\,dx$ debeat esse maximum vel minimum, existente $d[Z] = [L]\,d\Pi + [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq +$ &c. curva poterit exhiberi, quæ una pro quacunque abscissa ista proprietate gaudeat; ejusque natura exprimetur hac æquatione: $0 = [N]\,e^{-\int [L]\,dx} - \frac{d.[P]\,e^{-\int [L]\,dx}}{dx} + \frac{dd.[Q]\,e^{-\int [L]\,dx}}{dx^2} -$ &c. Ex qua insuper, evolutis singulis terminis, quantitas exponentialis $e^{-\int [L]\,dx}$, atque adeo ipsa formula integralis $\int [L]\,dx$ excedent.

SCHO-

SCHOLION I.

44. Usus hujus Propositionis eximius est in quæstionibus ita comparatis, ut quantitates indefinitæ in iis contentæ per formulas integrales exhiberi nequeant, verum constructionem æquationum differentialium postulent. Atque hæc solutio perinde valet, sive una hujusmodi quantitas Π insit in formula maximi minimive $\int Z\,dx$ sive plures; quod si enim plures insint ejusmodi quantitates Π, plures etiam habebuntur valores litterarum L. $[L]$, $[M]$, $[N]$, $[P]$, $[Q]$, &c. atque etiam litteræ $V = e^{-\int [L]\,dx}\left(H - \int e^{\int [L]\,dx} L\,dx\right)$; qui omnes æqualiter, eo modo quem invenimus, in valorem differentialem formulæ $\int Z\,dx$ introducti præbebunt æquationem pro curva; similisque omnino tractatio erit, ac si unica tantum adesset. Quoniam autem littera ista Π, cujus valor absolutus per quantitates ad curvam pertinentes exhiberi non potest, in omnibus fere terminis manet; æquatio pro curva, quæ invenitur, non solum ex litteris x, y, p, q, r, &c. constabit, sed etiam ipsam eam quantitatem Π, aliasque formulas integrales plerumque ab ea pendentes, uti $\int [L]\,dx$ & $\int L\,dx$, involvet. Quare ut æquatio pro curva pura, quæ tantum litteris x, y, p, q, &c. contineatur, prodeat, oportet cum æquatione inventa, postquam a formulis integralibus $\int [L]\,dx$ & $\int L\,dx$ est liberata, conjungi æquationem $d\Pi = [Z]\,dx$, ejusque ope valorem Π eliminari. Quanquam autem hoc modo ad differentialia altiorum ordinum pervenitur, tamen non totidem inesse censendæ sunt constantes arbitrariæ. Nam tam ipsa æquatio $d\Pi = [Z]\,dx$, quam reliquæ anteriores æquationes, certam requirunt determinationem, unde plures constantes determinabuntur. Cæterum notandum est veritatem hujus Methodi comprobari posse per præcedentes, quando æquatio $d\Pi = [Z]\,dx$ ita est comparata ut integrationem admittat: tum enim eædem quæstiones per Methodos ante traditas resolvi poterunt, indeque consensum observare licebit. Ita si $[Z]$ tantum ex x & Π constet, tum certum erit Π esse functionem

nem quamdam ipſius x determinatam, atque ſolutionem ad Caput præcedens pertinere. Idem vero hæc ſolutio patefaciet, cum enim ſit hoc caſu $[N] = 0$, $[P] = 0$, $[Q] = 0$, &c. æquatio pro curva erit $0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} -$ &c. quæ eadem per Methodum priorem obtinetur. Uſus autem hujus ſolutionis clarius per aliquot Exempla declarabitur.

EXEMPLUM I.

45. *Invenire curvam, in qua ſit maximus valor ipſius* Π, *exiſtente* $d\Pi = g\,dx - \alpha\Pi^n\,dx\sqrt{(1+pp)}$.

Quæſtio hæc occurrit quando quæritur curva, ſuper qua grave in medio reſiſtente ſecundum celeritatum rationem *n plicatam* deſcendens maximam obtinet celeritatem: denotat enim Π quadratum celeritatis, & g vim gravitatis ſecundum directionem axis AZ exertam. Pertinet itaque hæc quæſtio ad caſum Coroll. 3 4, & 5 expoſitum, quo erat $Z = [Z] = g - \alpha\Pi^n\sqrt{(1+pp)}$; atque adeo curva uni abſciſſæ ſatisfaciens pro omni abſciſſa æquè valebit. Cum igitur ſit $dZ = -\alpha n\Pi^{n-1}\,d\Pi\sqrt{(1+pp)} - \frac{\alpha\Pi^n p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$, erit $[L] = -\alpha n\Pi^{n-1}\sqrt{(1+pp)}$, $[M] = 0$, $[N] = 0$, $[P] = -\frac{\alpha\Pi^n p}{\sqrt{(1+pp)}}$; $[Q] = 0$, &c. Unde pro curva quæſita iſta invenitur æquatio: $0 = -d.[P]e^{-\int[L]dx}$, ſeu $[P]e^{-\int[L]dx} = C$; hincque $-\int[L]dx = lC - l[P]$, & $[L]dx = \frac{d[P]}{[P]}$. Subſtitutis ergò loco $[L]$ & $[P]$ debitis valoribus, erit $\int\alpha n\Pi^{n-1}dx\sqrt{(1+pp)} = +lC - l - \alpha - l\Pi^n - lp + l\sqrt{(1+pp)}$; hincque $\alpha n\Pi^{n-1}dx\sqrt{(1+pp)} = -\frac{n\,d\Pi}{\Pi} - \frac{dp}{p} + \frac{p\,dp}{(1+pp)}$ =

$= -\frac{dp}{p(1+pp)} - \frac{n\,d\Pi}{\Pi}$; seu $o = n d\Pi + \alpha n \Pi^n dx \sqrt{(1+pp)} + \frac{\Pi dp}{p(1+pp)}$. Quæ æquatio, ut eliminetur Π, conjungenda est cum hac $d\Pi + \alpha \Pi^n dx \sqrt{(1+pp)} = g\,dx$; unde statim fit $o = ng\,dx + \frac{\Pi\,dp}{p(1+pp)}$, & $\Pi = -\frac{ngpdx(1+pp)}{dp}$. Cum igitur curva fuerit inventa, hæc æquatio statim præbet celeritatem corporis in quovis curvæ loco. Ponatur $dx = -\frac{t\,dp}{ng}$, erit $\Pi = pt(1+pp)$ & $d\Pi = p\,dt\,(1+pp) + t\,dp(1+3pp)$; hincque obinebitur ista æquatio, $p\,dt\,(1+pp) + t\,dp\,(1+3pp) - \frac{\alpha p^n t^{n+1}(1+pp)^{n+\frac{1}{2}}dp}{ng} + \frac{t\,dp}{n} = o$, quæ transmutatur in hanc $\frac{np\,dt(1+pp)+t\,dp(n+1+3npp)}{nt^{n+1}p^{n+1}(1+pp)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{\alpha\,dp}{ngp^2}$; cujus integralis est $\frac{1}{nt^n p^{n+1}(1+pp)^{n-\frac{1}{2}}} = \frac{\alpha}{ngp} + \frac{\mathfrak{C}}{ng}$, seu $g = (\alpha+\mathfrak{C}p)\,t^n p^n (1+pp)^{n-\frac{1}{2}}$; hincque $t = \frac{\sqrt[n]{g}}{p(1+pp)^{1-1:2n}\sqrt[n]{(\alpha+\mathfrak{C}p)}}$. Erit igitur $dx = \frac{-dp}{np(1+pp)^{1-1:2n}\sqrt[n]{g^{n-1}(\alpha+\mathfrak{C}p)}}$, & $dy = \frac{-dp}{n(1+pp)^{1-1:2n}\sqrt[n]{g^{n-1}(\alpha+\mathfrak{C}p)}}$; hincque $\Pi = \sqrt[n]{\frac{g\sqrt{(1+pp)}}{\alpha+\mathfrak{C}p}}$. Erit ergo $x = -\frac{1}{ng}\int\frac{dp}{p(1+pp)}\sqrt[n]{\frac{g\sqrt{(1+pp)}}{\alpha+\mathfrak{C}p}}$, atque $y = -\frac{1}{ng}\int\frac{dp}{1+pp}\sqrt[n]{\frac{g\sqrt{(1+pp)}}{\alpha+\mathfrak{C}p}}$.

Hinc apparet quantitatem Π super curva nusquam esse posse $= o$; hanc ob rem, in curvæ initio Π jam habebit certum quem-

Digitized by Google

dam valorem. Ut autem indoles curvæ magis percipiatur, ex æquatione $\Pi = -\frac{ngpdx(1+pp)}{dp}$ patet valorem ipsius dp ubique negativum esse oportere, ex quo curva versus axem erit concava. Quia igitur valores ipsius p recedendo a curvæ initio decrescunt, in ipso curvæ initio p maximum habebit va-
Fig. 6. lorem. Hinc ponamus initium curvæ ibi, ubi est $p = \infty$. Sit ergo AP axis curvæ verticalis, in cujus directione vis gravitatis g corpus deorsum trahat, atque in initio curvæ A sit tangens horizontalis Aa: ibique corpus motum super curva incipiat, celeritate, cujus quadratum sit $= b$. Erit igitur, posito $p = \infty$, $b = \sqrt[n]{\frac{g}{6}}$, atque $6b^n = g$, seu $6 = \frac{g}{b^n}$. Porro ad uniformitatem conservandam sit $\alpha = \frac{1}{k^n}$. Quod si jam curva quæsita sit AM, & ponatur $AP = x$, $PM = y$, & $dy = pdx$; erit in M celeritatis quadratum $\Pi = bk\sqrt[n]{\frac{g\sqrt{(1+pp)}}{b^n + gk^n p}}$; atque ubi tangens curvæ fiet verticalis, ibi erit celeritatis quadratum $= k\sqrt[n]{g}$. Curvæ autem constructio ita conficietur, ut sit

$$x = -\frac{bk}{ng}\int \frac{dp}{p(1+pp)}\sqrt[n]{\frac{g\sqrt{(1+pp)}}{b^n + gk^n p}} \text{ \& }$$

$$y = -\frac{bk}{ng}\int \frac{dp}{1+pp}\sqrt[n]{\frac{g\sqrt{(1+pp)}}{b^n + gk^n p}}.$$

Deinde commemorari meretur singularis proprietas, seu relatio inter corporis descendentis vim centrifugam, quæ est $\frac{2\Pi}{\text{rad. oculi}}$, & vim normalem quæ est $\frac{gp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quod si enim vis centrifuga $\frac{2\Pi}{\text{rad. osc.}} = \frac{-2\Pi dp}{dx(1+pp)^{3:2}}$ ponatur $= F$, & vis normalis $\frac{gp}{\sqrt{(1+pp)}} = G$; erit, ex æquatione $\Pi = -\frac{ngpdx(1+pp)}{dp}$, seu $\frac{-2\Pi dp}{dx(1+pp)^{3:2}} = \frac{2ngp}{\sqrt{(1+pp)}}$, hæc relatio

tio inter vim centrifugam F & vim normalem G, ut ſit $F = nG$: nempe vis normalis ſe habebit ad vim centrifugam ut 1 ad n. Corpus in A data celeritate motum inchoans deſcendendo ſuper curva AM, in quovis loco M abſciſſæ AP reſpondente majorem habebit celeritatem, quam ſi ſuper alia quacunque curva eadem celeritate initiali deſcendiſſet. Evolvamus autem binos caſus principales;

Sitque 1°. reſiſtentia quadratis celeritatum proportionalis, erit $n = 1$, & $F = 2G$. Pro curva autem habebitur:

$$x = -bk\int \frac{dp}{p(b+gkp)\sqrt{(1+pp)}}$$

$$\& y = -bk\int \frac{dp}{(b+gkp)\sqrt{(1+pp)}};$$

itemque arcus curvæ $AM = -bk\int \frac{dp}{p(b+gkp)} = C + kl\frac{b+gkp}{p}$.

Ponatur arcus $AM = s$, qui cum evaneſcere debeat poſito $p = \infty$, erit $s = kl\frac{b+gkp}{gkp}$, hincque $e^{s:k}gkp = b+gkp$, & $p = \frac{b}{gk(e^{s:k}-1)} = \frac{dy}{dx}$. Unde oritur $b\,dx + gk\,dy = gke^{s:k}dy$.

Erit autem porro ex æquatione $y = -bk\int \frac{dp}{(b+gkp)\sqrt{(1+pp)}}$

integrata $y = \frac{bk}{\sqrt{(bb+ggkk)}}\, l\frac{(b+gkp)(b+\sqrt{(bb+ggkk)})}{gk(bp-gk+\sqrt{(bb+ggkk)(1+pp)})}$.

2°. Sit reſiſtentia ipſis celeritatibus proportionalis, fiet $n = \frac{2}{2}$ & $F = G$, hoc eſt vis centrifuga vi normali erit æqualis. Quæ binæ vires cum ſint contrariæ, quæſito ſatisfaciet ea curva, quæ a corpore ſuper ea deſcendente omnino non premitur. Erit autem

$$x = -2gbk\int \frac{dp}{p(\sqrt{b}+gp\sqrt{k})^2}$$

$$\& y = -2gbk\int \frac{dp}{(\sqrt{b}+gp\sqrt{k})^2} = \frac{2b\sqrt{k}}{\sqrt{b}+gp\sqrt{k}};$$

hincque $ydx\sqrt{b}+gydy\sqrt{k} = 2bdx\sqrt{k}$, & $dx = \frac{gydy\sqrt{k}}{2b\sqrt{k}-y\sqrt{b}}$; hincque integrando $x = -gy\sqrt{\frac{k}{b}} + 2gkl\frac{2b\sqrt{k}}{2b\sqrt{k}-y\sqrt{b}}$. Hæc er-

go curva non ſolum per Logarithmicam conſtrui poteſt, verum eſt portio ipſius Logarithmicæ obliquangulæ. Erit ſcilicet ipſa curva projectoria, quam corpus in hac reſiſtentiæ hypotheſi projectum libere deſcribit. Hæc convenientia ex eo patet, quod curva a corpore moto nullam ſuſtinet preſſionem, quæ eſt proprietas curvarum libere deſcriptarum.

EXEMPLUM II.

46. *Invenire curvam in qua, pro data abſciſſa* $x = a$, *minimum ſit iſta formula* $\int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{\Pi}}$, *exiſtente* $d\Pi = g\,dx - \alpha\Pi^n dx\sqrt{(1+pp)}$.

Quæſtio hæc congruit cum illa, in qua requiritur curva, ſuper qua corpus deſcendens, in medio reſiſtente cujus reſiſtentia eſt ut poteſtas exponentis $2n$ celeritatis, citiſſime arcum abſciſſæ a reſpondentem abſolvit. Denotat enim hîc g vim gravitatis ſecundum directionem axis ſollicitantem, $\sqrt{\Pi}$ celeritatem corporis in quocunque loco, & $\alpha\Pi^n$ reſiſtentiam medii ipſam. Erit itaque $Z = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{\Pi}}$, & hinc $dZ = \ldots = \frac{-d\Pi\sqrt{(1+pp)}}{2\Pi\sqrt{\Pi}} + \frac{p\,dp}{\sqrt{\Pi(1+pp)}}$, unde erit $L = \frac{-\sqrt{(1+pp)}}{2\Pi\sqrt{\Pi}}$; $M = 0$, $N = 0$, $P = \frac{p}{\sqrt{\Pi(1+pp)}}$ Porro erit $[Z] = g - \alpha\Pi^n\sqrt{(1+pp)}$, & $d[Z] = -\alpha n\Pi^{n-1}d\Pi\sqrt{(1+pp)} - \frac{\alpha\Pi^n p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$; unde erit $[L] = -\alpha n\Pi^{n-1}\sqrt{(1+pp)}$; $[M] = 0$, $[N] = 0$, & $[P] = \frac{-\alpha\Pi^n p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Habebitur ergo $V = e^{\alpha n\int\Pi^{n-1}dx\sqrt{(1+pp)}} \ldots\ldots$ $\times(\int e^{-\alpha n\int\Pi^{n-1}dx\sqrt{(1+pp)}}\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2\Pi\sqrt{\Pi}} - H)$;

deno-

denotante H eum valorem formulæ . . . . . .

$\int e^{-\alpha n \int \Pi^{n-1} dx \sqrt{(1+pp)}} \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2\Pi\sqrt{\Pi}}$ quem obtinet si fit $x = a$. Namque V evanescere debet posito $x = a$, estque $dV = \alpha n V \Pi^{n-1} dx\sqrt{(1+pp)} + \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2\Pi\sqrt{\Pi}}$. Ex his pro curva quæsita obtinebitur ista æquatio: $d.(P+[P]V) = 0$, & $P+[P]V = C$, seu $V = \frac{C-P}{[P]}$. Substitutis ergo valoribus debitis, erit $e^{\alpha n \int \Pi^{n-1} dx\sqrt{(1+pp)}}$ . . . . . $\times\left(\int e^{-\alpha n \int \Pi^{n-1} dx\sqrt{(1+pp)}} \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2\Pi\sqrt{\Pi}} - H\right) = \frac{p - C\sqrt{\Pi(1+pp)}}{\alpha \Pi^n p\sqrt{\Pi}}$. Quare constantem C ita determinari oportet, ut posito $x = a$, fiat $C = \frac{p}{\sqrt{\Pi(1+pp)}}$. Cum autem sit $V = \frac{1}{\alpha\Pi^n\sqrt{\Pi}} - \frac{C\sqrt{(1+pp)}}{\alpha\Pi^n p}$, erit $dV = \frac{-(n+\frac{1}{2})d\Pi}{\alpha\Pi^{n+1}\sqrt{\Pi}} + \frac{nC\,d\Pi\sqrt{(1+pp)}}{\alpha\Pi^{n+1}p} + \frac{C\,dp}{\alpha\Pi^n p^2\sqrt{(1+pp)}} = \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2\Pi\sqrt{\Pi}} + \frac{n\,dx\sqrt{(1+pp)}}{\Pi\sqrt{\Pi}} - \frac{nC(1+pp)dx}{p\Pi}$; in subsidium vocata æquatione $dV = \alpha n V \Pi^{n-1} dx\sqrt{(1+pp)} + \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2\Pi\sqrt{\Pi}}$. Cum autem sit $d\Pi = g\,dx - \alpha\Pi^n dx$. $\times\sqrt{(1+pp)}$ erit $-\frac{(n+\frac{1}{2})g\,dx}{\alpha\Pi^{n+1}\sqrt{\Pi}} + \frac{nCg\,dx(1+pp)}{\alpha\Pi^{n+1}p}$ . . . $+ \frac{C\,dp}{\alpha\Pi^n p^2\sqrt{(1+pp)}} = 0$, seu $\frac{C\,dp}{p^2\sqrt{(1+pp)}} = \frac{(n+\frac{1}{2})g\,dx}{\Pi\sqrt{\Pi}} - \frac{nCg\,dx\sqrt{(1+pp)}}{\Pi p}$. Quod si jam hæc æquatio cum illa $d\Pi = g\,dx - \alpha\Pi^n dx\sqrt{(1+pp)}$ conjungatur, poterit eliminari

minari quantitas Π, hocque pacto inveniri æquatio pro curva quæsita. Hoc autem modo calculus fieret maxime tædiosus, ac minime tractabilis. Adminiculum vero summum afferet ultima æquatio in hanc formam transmutata: $\frac{C\,dp}{g\,p^2} = \frac{(n+\frac{1}{2})\,dx\sqrt{(1+pp)}}{\Pi\sqrt{\Pi}} - \frac{n\,C\,dx\,(1+pp)}{\Pi\,p}$, cui expressioni ante æqualis esse inventus est valor ipsius dV; erit ergo $dV = \frac{C\,dp}{g\,p\,p}$ & $V = D - \frac{C}{g\,p} = \frac{1}{\alpha\,\Pi^n\sqrt{\Pi}} - \frac{C\sqrt{(1+pp)}}{\alpha\,\Pi^n\,p}$. Jam igitur habemus duas æquationes has $\frac{C\,dp}{g\,p^2} = \frac{(n+\frac{1}{2})\,dx\sqrt{(1+pp)}}{\Pi\sqrt{\Pi}} - \frac{n\,C\,dx\,(1+pp)}{\Pi\,p}$, & $\alpha D - \frac{\alpha C}{g\,p} = \frac{1}{\Pi^n\sqrt{\Pi}} - \frac{C\sqrt{(1+pp)}}{\Pi^n\,p}$. Ex quibus si eliminetur Π, habebitur æquatio inter p & x ejusmodi, ut nusquam x sed ubique tantum dx occurrat, ex quo illa æquatio poterit construi atque adeo ipsa curva. Vel facilius ex posteriori æquatione determinetur p per Π, hicque valor in æquatione fundamentali $dx = \frac{d\,\Pi}{g - \alpha\,\Pi^n\sqrt{(1+pp)}}$ substitutus, dabit valorem ipsius x per Π, erit scilicet $x = \int \frac{d\,\Pi}{g - \alpha\,\Pi^n\sqrt{(1+pp)}}$ atque $y = \int \frac{p\,d\,\Pi}{g - \alpha\,\Pi^n\sqrt{(1+pp)}}$. Constans autem D ita debet accipi, ut posito $x = a$, quo casu fit $C = \frac{p}{\sqrt{\Pi(1+pp)}}$, fiat $D = \frac{1}{g\sqrt{\Pi(+pp)}}$, seu tum esse debet $\frac{C}{D} = g\,p$.

SCHOLION II.

47. In his igitur duobus Capitibus, Methodum exposuimus inveniendi lineam curvam, in qua, pro datæ magnitudinis abscissa $= a$, maximum minimumve sit formula $\int Z\,dx$, existente Z func-

functione ipsarum x, y, p, q, r, &c. sive determinata sive indeterminata. Functio autem determinata nobis est, quæ, si alicubi dentur valores litterarum x, y, p, q, r &c. ipsa assignari potest, sive algebraice sive transcendenter. Functio autem indeterminata est, quæ per datos istarum litterarum valores, quos uno in loco obtinent, assignari nequit, sed omnes valores præcedentes simul involvit, quemadmodum hoc evenit, si signa integralia occurrant. In Capite igitur secundo Methodum tradidimus omnia Problemata resolvendi, in quibus Z est functio determinata; in tertio vero hoc Capite persecuti sumus eas formulas, in quibus Z, vel ipsa est functio indefinita, vel talium unam pluresve involvit; simulque Methodum exhibuimus pro iis casibus, quibus functio illa indefinita nequidem per formulas integrales repræsentari potest, verum resolutionem æquationis differentialis requirit. Nunc igitur eos casus evolvamus, in quibus expressio, quæ maximum minimumve esse debet, non simplex est formula integralis, uti hactenus posuimus, sed ex pluribus ejusmodi formulis utcunque composita: atque simul Methodum aperiemus plura alia Problemata, quæ non ad coordinatas orthogonales spectant, expedite resolvendi.

CAPUT IV.

De Usu Methodi hactenus traditæ in resolutione varii generis quæstionum.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

1. *Invenire æquationem inter binas variabiles* x *&* y, *ita ut, pro dato ipsius* x *valore, puta posito* $x = a$, *formula* $\int Z\,dx$ *obtineat maximum minimumve valorem, existente* Z *functione ipsarum* x, y, p, q, r, *&c. sive determinata sive indeterminata.*

SOLUTIO.

Ex quacunque consideratione variabiles x & y sint natæ, eæ

ſemper tanquam coordinatæ orthogonales cujuſpiam curvæ conſiderari poſſunt: atque hanc ob rem quæſtio propoſita huc revocatur, ut determinetur curva abſciſſam habens $= x$ & applicatam $= y$, in qua valor $\int Z dx$, ſi ad abſciſſam datæ magnitudinis, puta $x = a$, applicetur, fiat omnium maximus vel minimus. Quod ſi autem Problema hoc modo proponatur, tum ejus ſolutio in præcedentibus Capitibus ſatis ſuperque eſt tradita. Quamobrem formulæ propoſitæ $\int Z dx$, ſecundum Methodos ante expoſitas, capi oportet valorem differentialem, qui datæ abſciſſæ $x = a$ conveniat, iſque nihilo æqualis poſitus dabit æquationem inter x & y deſideratam, quæ pro data abſciſſa $x = a$, producet formulæ $\int Z dx$ maximum minimumve valorem. Q. E. I.

Coroll. I.

2. Methodus ergo ante tradita multo latius patet; quam ad æquationes inter coordinatas curvarum inveniendas, ut quæpiam expreſſio $\int Z dx$ fiat maximum minimumve. Extenditur ſcilicet ad binas quaſcunque variabiles, ſive eæ ad curvam aliquam pertineant quomodocunque, ſive in ſola analytica abſtractione verſentur.

Coroll. II.

3. Inter binas autem variabiles propoſitas diſcrimen ingens intercedit, eo quod propoſita formula $\int Z dx$ pro determinato quodam alterius variabilis valore maximum minimumve obtinere debeat. Iſthanc ergo variabilem conſtanter litera x, alteram vero littera y denotari convenit.

Coroll. III.

4. Litteris igitur x & y debito modo binis quantitatibus variabilibus impoſitis, erit $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$; $s =$

$s = \frac{dr}{dx}$ &c. His scilicet litteris differentialia cujuscunque gradus, quæ forte in maximi minimive formula insint, tolli poterunt, ita ut Z futura sit functio litterarum x, y, p, q, r, &c.

COROLL. IV.

5. Cum ergo maximi minimive formula ad talem formam $\int Z dx$ fuerit reducta, in qua Z sit functio ipsarum x, y, p, q, r, &c. sive definita sive indefinita, tum ex superioribus præceptis formulæ $\int Z dx$ valor differentialis, respondens toti abscissæ propositæ $x = a$, debet investigari, qui nihilo æqualis positus præbebit æquationem inter x & y quæsitam.

COROLL. V.

6. Si Z est functio definita ipsarum x, y, p, q, r, &c. tum valor differentialis formulæ $\int Z dx$ non pendet a præscripto abscissæ valore $x = a$; & hanc ob rem æquatio inter x & y inventa pro qualibet abscissa præbebit maximum vel minimum formulæ $\int Z dx$.

SCHOLION I.

7. Quia in hoc negotio valores differentiales, quos ante pro omni genere formularum sparsim eruimus, in promtu esse oportet, eos hic conjunctim in conspectum producemus, ut sit unde, quovis casu oblato, valores differentiales, quibus opus fuerit, conquiri ac depromi queant. Exhibebimus igitur formulæ $\int Z dx$ pro varia functionis Z indole valorem differentialem, qui perpetuo determinatæ variabilis x quantitati, puta $x = a$, respondeat.

I.

Maximi minimive formula

$$\int Z\,dx.$$

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c.$$

Valor differentialis erit

$$nv.\,dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d\,dQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \&c.\right)$$

qui valor differentialis pro omni variabilis x magnitudine æque valet.

I I.

Maximi minimive formula

$$\int Z\,dx.$$

$$dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + \&c.$$

$$\&\ \Pi = \int [Z]\,dx$$

existente

$$d[Z] = [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq + [R]\,dr + \&c.$$

Jam posito post integrationem $x = a$, sit $\int L\,dx = H$, ponaturque $H - \int L\,dx = V$,

Valor differentialis erit

$$nv.\,dx\left(N + [N]V - \frac{d.(P + [P]V)}{dx} + \frac{d\,d.(Q + [Q]V)}{dx^2}\right.$$
$$\left. - \frac{d^3.(R + [R]V)}{dx^3} + \frac{d^4.(S + [S]V)}{dx^4} - \&c.\right)$$

I I I.

Maximi minimive formula

$$\int Z\,dx.$$

$$dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + \&c.$$

$$\&\ \Pi = \int [Z]\,dx$$

$$d[Z] = [L]\,d\Pi + [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq + \&c.$$

$$\&\ \pi = \int [z]\,dx$$

$$d[z] = [m]\,dx + [n]\,dy + [p]\,dp + [q]\,dq + [r]\,dr + \&c.$$

Sit iterum, posito post integrationem $x = a$ ut ante, $\int L\,dx = H$

$= H$, ac ponatur $H - \int L\,dx = V$. Jam integretur $\int [L] V\,dx$, fitque integrale, eo caſu quo $x = a$ ponitur, $= G$, ac ponatur $G - \int [L] V\,dx = [V] = G - \int [L]\,dx\,(H - \int L dx)$; His poſitis, Valor differentialis erit

$$n\nu \cdot dx\,(N + [N]V + [n][V] - \frac{d.(P + [P]V + [p][V])}{dx} + \frac{dd(Q + [Q]V + [q][V])}{dx^2} - \frac{d^3.(R + [R]V + [r][V])}{dx^3} + \frac{d^4.(S + [S]V + [s][V])}{dx^4} - \text{\&c. })$$

unde ſimul lex progreſſionis patet, ſi adhuc plura integralia involvantur.

IV.

Maximi minimive formula

$$\int Z\,dx.$$

$$dZ = L\,dn + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + \text{\&c.}$$

$$\& \; n = \int Z\,dx$$

Abeat, poſito $x = a$, hæc expreſſio $e^{\int L\,dx}$ in H, denotante e numerum cujus logarithmus eſt $= 1$, ſitque $H\,e^{-\int L dx} = V$: Valor differentialis erit

$$n\nu \cdot dx\,(NV - \frac{d.PV}{dx} + \frac{dd.QV}{dx^2} - \frac{d^3.RV}{dx^3} + \frac{d^4.SV}{dx^4} - \text{\&c. })$$

V.

Maximi minimive formula

$$\int Z\,dx.$$

$$dZ = L\,dn + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \text{\&c.}$$

$$\& \; n = \int [Z]\,dx$$

$$d[Z] = [L]dn + [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + [R]dr + \text{\&c.}$$

Sit, ſi ponatur $x = a$, poſt integrationem

$$\int e^{\int [L] dx} L\,dx = H$$

atque ponatur

$$e^{-\int [L]\,dx}\left(H - \int e^{\int [L]\,dx} L\,dx\right) = V$$

Valor differentialis erit

$$m.dx\left(N + [N]V - \frac{d.(P+[P]V)}{dx} + \frac{dd.(Q+[Q]V)}{dx^2} - \frac{d^3.(R+[R]V)}{dx^3} + \frac{d^4.(S+[S]V)}{dx^4} - \text{&c.}\right).$$

In his igitur quinque casibus continentur omnes regulæ, quas in Capitibus præcedentibus invenimus. Iique tam late patent, ut omnes casus qui quidem occurrere queant, in iis vel actu contineantur, vel saltem per eos non difficulter resolvi possint. Iis igitur hic in compendium redactis, eorum usum monstrabimus, in resolvendis quæstionibus, in quibus x & y non denotant coordinatas orthogonales.

EXEMPLUM I.

Fig. 7. 8. *Ex dato centro* C *ductis radiis* CA, CM, *invenire lineam* AM, *quæ inter omnes alias lineas intra angulum* ACM *contentas sit brevissima.*

Patet quidem hanc lineam quæsitam esse rectam: interim tamen hanc quæstionem secundum præcepta data resolvi conveniet, ut consensus Methodi cum veritate luculentius perspiciatur. Cum igitur longitudo lineæ AM pro dato angulo ACM debeat esse minima; ponamus angulum hunc ACM esse $= x$; seu centro C, radio CB $= 1$, describamus circulum, sitque arcus BS $= x$. Tum sit radius CM altera variabilis $= y$, æquatione enim inter has variabiles x & y inventa, innotescet natura lineæ quæsitæ AM. Jam autem ducto radio proximo C m erit Ss $= dx$, & mn $= dy$, sumto Cn $=$ CM: ob triangula vero similia CSs & CMn erit $1 : dx =$ CM$[y]$: Mn$[y\,dx]$. Ex his itaque erit Mm $= \sqrt{(dy^2 + y^2dx^2)}$; & quia perpetuo ponimus $dy = p\,dx$, erit Mm $= dx\sqrt{(yy + pp)}$; unde lineæ AM longitudo erit $= \int dx\sqrt{(yy+pp)}$, quæ debet esse minima pro dato ipsius x valore, puta $x = a$. At quia hæc formula

mula ad casum primum pertinet, linea satisfaciens erit pro quovis valore ipsius x minima. Cum igitur sit $Z = \sqrt{(yy+pp)}$, erit $dZ = \frac{y\,dy}{\sqrt{(yy+pp)}} + \frac{p\,dp}{\sqrt{(yy+pp)}}$, & in casu primo fiet $M = 0$, $N = \frac{y}{\sqrt{(yy+pp)}}$, $P = \frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}}$, $Q = 0$; $R = 0$, &c. ideoque $dZ = N\,dy + P\,dp$. Habebitur ergo iste valor differentialis $m\,v.\,dx\left(N - \frac{dP}{dx}\right)$, indeque pro solutione ista æquatio, $0 = N - \frac{dP}{dx}$: quæ, multiplicata per $p\,dx = dy$, dat $N\,dy = p\,dP$; quo in æquatione $dZ = N\,dy + P\,dp$ substituto, prodibit $dZ = P\,dp + p\,dP$, & integrando $Z + C = Pp$, seu $C + \sqrt{(yy+pp)} = \frac{pp}{\sqrt{(yy+pp)}}$. Quocirca erit $\frac{yy}{\sqrt{(yy+pp)}} = Const. = b$. At est $M\,m\,[dx\sqrt{(yy+pp)}] : M\,n\,[y\,dx] = M\,C\,[y] : \frac{yy}{\sqrt{(yy+pp)}}$; quæ quarta proportionalis præbet perpendiculum CP, quod ex C in tangentem lineæ quæsitæ MP demittitur. Cum igitur hoc perpendiculum CP sit constans, intelligitur lineam quæsitam esse rectam: & quia, in æquatione inventa prima $N\,dx = dP$, duæ insunt potentia constantes arbitrariæ, conditio hæc quæstioni est addenda, ut linea quæsita per data duo puncta transeat; tum igitur linea recta per illa duo puncta ducta quæsito satisfaciet.

EXEMPLUM II.

9. *Super axe* AP *construere lineam* BM, *ita comparatam, ut, abscissa area* $ABMP$ *datæ magnitudinis, arcus curvæ* BM *illi areæ respondens sit omnium minimus.* *Fig. 8.*

Quia pro data area $ABMP$ minima longitudo arcus BM requiritur, area $ABMP$ nobis designanda erit variabili x: altera variabili y autem indicemus applicatam curvæ PM. Jam sit abscissa $AP = t$, erit $x = \int y\,dt$, ideoque $dt = \frac{dx}{y}$: atque

arcus

arcus BM longitudo erit $= \int \sqrt{(dy^2 + \frac{dx^2}{yy})}$. Posito ergo $dy = p\,dx$, minimum esse debet haec formula $\int dx \sqrt{(\frac{1}{yy} + pp)}$ $= \int \frac{dx\sqrt{(1+yypp)}}{y}$. Erit itaque $Z = \frac{\sqrt{(1+yypp)}}{y}$, & $dZ = -\frac{dy}{yy\sqrt{(1+y^2p^2)}} + \frac{yy\,p\,dp}{y\sqrt{(1+y^2p^2)}}$: unde $M = 0$ $N = \frac{-1}{yy\sqrt{(1+y^2p^2)}}$; $P = \frac{yp}{\sqrt{(1+y^2p^2)}}$, $Q = 0$ &c. Pertinet ergo haec quaestio ad casum primum, ac solutio praebebit lineam curvam, quae pro area quacunque APMB abscissae erit brevissima. Pervenietur autem, uti in praecedente Exemplo, ad aequationem hanc $Z = C + Pp$, atque curva quaesita per data duo puncta describi poterit. Erit itaque $\frac{\sqrt{(1+yypp)}}{y}$ $= C + \frac{ypp}{\sqrt{(1+yypp)}}$, seu $1 = Cy\sqrt{(1+yypp)}$: vel $b = y\sqrt{(1+yypp)}$; hinc fit $bb = yy + y^4pp$, & $p = \frac{\sqrt{(bb-yy)}}{yy} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ydt}$, ob $dx = y\,dt$. Erit igitur $dt = \frac{y\,dy}{\sqrt{(bb-yy)}}$, & $t = c \pm \sqrt{(bb-yy)}$. Quare linea quaesita erit Circulus, centro alicubi in axe AP, puta in C, assumto: isque inter omnes alias curvas per eadem duo quaecunque puncta ductas, pro data resecta area ABMP, habebit arcum BM brevissimum.

EXEMPLUM III.

Fig. 9. 10. *Eductis ex puncto fixo* C *radiis* CA, CM; *intra eos describere curvam* AM, *quae pro dato spatio* ACM *habeat arcum* AM *brevissimum.*

Quia arcus AM minimus esse debet, si spatium ACM datae magnitudinis abscindatur; ponatur area haec $ACM = x$, atque radius CM designetur altera variabili y. Jam ponatur arcus

arcus BS, radio CB = 1 descriptus, = t; erit, ut ante vidimus, Mn = $y\,dt$, & area MCm = $\frac{1}{2}yy\,dt = dx$, unde fit $dt = \frac{2dx}{yy}$. Quia porro est Mm = $\sqrt{(dy^2 + y^2dt^2)} = \sqrt{(dy^2 + \frac{4dx^2}{yy})}$; sit $dy = p\,dx$, minimumque esse debet $\int \frac{dx}{y}\sqrt{(4+ppyy)}$. Cum igitur sit $Z = \frac{\sqrt{(4+y^2p^2)}}{y}$, erit $M = 0$, $N = -\frac{4}{yy\sqrt{(4+y^2p^2)}}$, & $P = \frac{yp}{\sqrt{(4+y^2p^2)}}$, $Q = 0$, &c. Hinc resultat ista æquatio $Z = C + Pp$; propterea quod sit $M = 0$: ideoque $\frac{\sqrt{(4+y^2p^2)}}{y} = C + \frac{ypp}{\sqrt{(4+y^2p^2)}}$, seu $4 = Cy\sqrt{(4+yypp)}$ vel $2b = y\sqrt{(4+yypp)}$; hincque $p = \frac{2\sqrt{(bb-yy)}}{yy} = \frac{dy}{dx} = \frac{2\,dy}{yy\,dt}$; ac $dt = \frac{dy}{\sqrt{(bb-yy)}}$: itemque integrando $t = A$ sin. $\frac{y}{b} + A$ sin. $\frac{c}{b} = A$ sin. $\frac{y\sqrt{(bb-cc)}+c\sqrt{(bb-yy)}}{bb}$. In AC ex S demittatur perpendiculum QS = sin. At, erit QS = $\frac{y\sqrt{(bb-cc)}}{bb} + \frac{c\sqrt{(bb-yy)}}{bb}$. At ex æquatione t + *Const.* = A sin. $\frac{y}{b}$ colligitur curva quæsita esse Circulus AME per punctum fixum C transiens. Describatur enim super diametro quacunque CE in C terminata Circulus CAME, arcus AM interceptus inter radios ACM pro data area ACM erit minimus. Scilicet si alia quæcunque curva per duo quæcunque puncta in hoc Circulo sita describatur, binisque radiis ex C ductis area æqualis areæ ACM abscindatur, arcus illius curvæ respondens perpetuo major erit quam arcus AM. Quod ut appareat, ducatur ex C ad CE normalis CD, in eamque ex S perpendiculum SQ demittatur: erit triangulum SCQ simile triangulo CEM, hincque CE : CM [y] = CS [1]: SQ seu SQ = $\frac{y}{CE}$ = sin. A. DBS, vel DBS *Fig.* 9.

$= A \text{ fin. } \frac{y}{CE}$. Posita ergo diametro $CE = b$, & quia est $DBS = BS + BD = t + Const.$ erit $t + Const. = A \text{ fin. } \frac{y}{b}$: quæ est ipsa illa proprietas, qua curvam quæsitam præditam esse oportere invenimus.

EXEMPLUM IV.

Fig. 10. 11. *In superficie quacunque, sive convexa sive concava, ducere lineam, quæ sit intra suos terminos omnium brevissima.*

Sumatur planum quodcunque ad quod superficies referatur; APQ, in eoque capiatur recta AP pro axe. Jam ex lineæ quæsitæ singulis punctis concipiantur perpendicula in hoc planum demitti, quibus describatur linea AQ, quæ erit projectio lineæ brevissimæ in hoc planum; qua cognita, simul ipsa linea brevissima in superficie proposita innotescet. Vocetur $AP = x$; $PQ = y$; atque cum natura superficiei detur, ex datis $AP = x$ & $PM = y$ definiri poterit longitudo perpendicularis QM in planum APQ, donec superficiem in M secet. Quod si ergo ponatur $QM = z$, longitudo hujus lineæ z dabitur per x & y, ita ut z sit functio definita ipsarum x & y. Cum igitur sit z functio ipsarum x & y, quæ ex æquatione locali ad superficiem datur, ponamus esse $dz = T dx + V dy$; eruntque T & V ejusmodi functiones ipsarum x & y, ut $T dx + V dy$ sit formula differentialis definita: posito nempe $dT = E dx + F dy$, erit $dV = F dx + G dy$, existente littera F utrique differentiali communi. Nunc elementum lineæ in superficie ductæ est $= \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + (T dx + V dy)^2)}$. Posito ergo $dy = p dx$, minimum esse debet hæc formula $\int dx \sqrt{(1 + p^2 + T^2 + 2TVp + V^2 p^2)}$; ita ut sit $Z = \sqrt{(1 + p^2 + T^2 + 2TVp + V^2 p^2)}$, unde fit

$$dZ = \begin{cases} +TEdx + TFdy + pdp \\ +VEpdx + VFpdy + TVdp \\ +TFpdx + TGpdy + V^2pdp \\ +VFp^2dx + VGppdy \end{cases} \Big/ \sqrt{(1+pp+T^2+2TVp+V^2p^2)}$$

Quæ formula cum ad casum primum pertineat, proveniet ista æquatio inter x & y;

$$\frac{TFdx + VFpdx + TGpdx + VGppdx}{\sqrt{(1+pp+T^2+2TVp+V^2p^2)}} = d.\frac{p+TV+V^2p}{\sqrt{(1+pp+T^2+2TVp+V^2p^2)}}.$$

Est vero $Fdx+Gpdx = Fdx+Gdy = dV$, unde erit $\frac{TdV+VpdV}{\sqrt{(1+pp(T+Vp)^2)}} = d.\frac{p+TV+V^2p}{\sqrt{(1+pp+(T+Vp)^2)}}$

$$= \begin{cases} +dp(1+T^2+V^2) \\ +dT(V-Tp) \\ +dV(T+T^3+3T^2Vp+3TV^2p^2+V^3p^3+2Vp+Vp^3) \end{cases} \Big/ (1+pp+(T+Vp)^2)^{3:2}$$

Æquatione autem ordinata, resultabit hæc $dp(1+T^2+V^2) + dT(V-Tp) + dV(Vp-Tpp) = 0$, seu $dp = \frac{(Tp-V)(dT+pdV)}{1+T^2+V^2}$. Cum vero sit $p = \frac{dy}{dx}$, erit $dp = \frac{ddy}{dx}$; hincque fiet $dx\,ddy = \frac{(Tdy-Vdx)(dxdT+dydV)}{1+T^2+V^2}$ quæ est æquatio differentio-differentialis pro projectione AQ lineæ brevissimæ in superficie quæsita; ideoque indicat, eam per duo quæque puncta duci posse. Æquatio hæc inventa in varias formas transmutari potest, quæ sæpius majore commodo usurpari poterunt. Ac primo quidem expediet eliminari differentialia dT & dV: cum enim sit $dz = Tdx + Vdy$, erit $ddz = dxdT + dydV + Vddy$; ideoque $dxdT + dydV =$

$ddz - Vddy$, quo valore ſubſtituto prodibit iſta æquatio $dxddy + T^2\,dxddy + V^2\,dxddy = Tdyddz - Vdxddz - TVdyddy + V^2\,dxddy$, ſeu $dxddy + Tdzddy = Tdyddz - Vdxddz$; hincque $ddy : ddz = Tdy - Vdx : dx + Tdz$. Multiplicetur æquatio inventa per dz, ac in primo termino ſcribatur $Tdx + Vdy$ loco dz, erit $Tdx^2\,ddy + Vdxdyddy + Tdz^2\,ddy = Tdydzddz - Vdxdzddz$. Addatur utrimque $Tdy^2\,ddy - Vdxdyddy$, erit $Tddy(dx^2 + dy^2 + dz^2) = (dzddz + dyddy)(Tdy - Vdx)$ ſeu $\frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{Tddy}{Tdy - Vdx} = \frac{Tddz}{dx + Tdz}$. Vel multiplicetur æquatio per dx, ac loco Tdx ſcribatur $dz - Vdy$, obtinebitur $dx^2ddy + dz^2ddy - Vdydzddy = dydzddz - Vdy^2\,ddz - Vdx^2\,ddz$. Addatur utrimque $dy^2\,ddy - Vdz^2\,ddz$, erit $ddy(dx^2 + dy^2 + dz^2) - Vdz(dyddy + dzddz) = dy(dyddy + dzddz) - Vddz(dx^2 + dy^2 + dz^2)$; ideoque $\frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{ddy + Vddz}{dy + Vdz}$; quæ æquationes omnes in ſequenti expreſſione continentur $\frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{Tddy}{Tdy - Vdx} = \frac{Tddz}{dx + Tdz} = \frac{ddy + Vddz}{dy + Vdz}$. Hic notandum eſt, quia quantitatum T & V differentialia nuſquam occurrunt, perinde eſſe, ſive in T & V contineatur x, ſive minus. Quovis igitur caſu oblato, conveniet eam æquationem aſſumere, quæ facillime integrationem admittat. Veluti ſi ſuperficies propoſita ſit ſolidi rotundi converſione cujuſcunque figuræ circa axem A P nati, erit $yy + zz =$ quadrato functionis ipſius x, quæ ſit $= X$, eſtque applicata illius curvæ genitricis abſciſſæ x reſpondens. Erit itaque $zdz = XdX - ydy$, & $dz = \frac{XdX}{z} - \frac{ydy}{z}$ unde fiet $T = \frac{XdX}{zdx}$, & $V = -\frac{y}{z}$. Sumatur jam, commodi ergo, æquatio in qua T non occur-

occurrit, hæc $\frac{dydy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{ddy + Vddz}{dy + Vdz}$, quæ, ob $V = \frac{-y}{z}$, tranſit in hanc $\frac{dyddy + dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2} = \frac{zddy - yddz}{zdy - ydz}$, cujus integrale eſt $l\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = l\frac{zdy - ydz}{b}$, ſeu $zdy - ydz = b\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Quoniam nunc eſt $z = \sqrt{(X^2 - y^2)}$, ponatur $dX = vdx$, erit $dz = \frac{Xvdx - ydy}{\sqrt{(X^2 - y^2)}}$, & $zdy - ydz = \frac{X^2dy - Xyvdx}{\sqrt{(X^2 - y^2)}}$, & $\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)} = \frac{\sqrt{(X^2dx^2 - y^2dx^2 + X^2dy^2 + X^2v^2dx^2 - 2Xyvdxdy)}}{\sqrt{(X^2 - y^2)}}$.

Ergo $X^4dy^2 - 2X^3yvdxdy + X^2y^2v^2dx^2 = bbX^2dx^2 - bby^2dx^2 + bbX^2dy^2 + b^2X^2v^2dx^2 - 2b^2Xyvdxdy$, ſeu $dy^2 = \frac{2(b^2 - X^2)Xyvdxdy + X^2y^2v^2dx^2 - b^2X^2dx^2 + b^2y^2dx^2 - b^2X^2v^2dx^2}{X^2(bb - XX)}$,

quæ, extracta radice, præbet $dy = \frac{yvdx}{X} \pm \frac{bdx\sqrt{(1+vv)(yy - XX)}}{X\sqrt{(bb - XX)}}$.

Quod ſi ponatur $y = Xt$, ut ſit $dy = Xdt + tvdx$, fiet $\frac{dt}{\sqrt{(tt - 1)}} = \frac{bdx\sqrt{(1 + vv)}}{X\sqrt{(bb - XX)}}$; in qua æquatione, quia X & v ſunt functiones ipſius x, variabiles t & x a ſe invicem ſunt ſeparatæ.

EXEMPLUM V.

12. *Super axe* APN *conſtruere curvam* AM *ejuſmodi, ut, abſciſſa per normalem* MN *area* ANM *datæ magnitudinis, arcus* AM *ſit minimus.* Fig. 21.

Quia, pro definita areæ AMN magnitudine, arcus AM minimus eſſe debet, ponatur area $AMN = ax$, poſitoque $x = a$, quo caſu area AMN fit $= aa$, fiat arcus AM minimus. Ponatur porro applicata orthogonalis $MP = y$, abſciſſa $AP = t$, & ſubnormalis $PN = u$; erit $ax = \int y\,dt + \frac{1}{2}uy$, & $u = \frac{ydy}{dt}$: elementum vero arcus AM erit $= \frac{dy}{}$

$\frac{dy\sqrt{(yy+uu)}}{u}$. Porro cum ſit $a\,dx = y\,ds + \frac{1}{2}(u\,dy + y\,du)$ & $ds = \frac{y\,dy}{u}$, erit $a\,u\,dx = yy\,dy + \frac{1}{2}uu\,dy + \frac{1}{2}yu\,du$, & $du = \frac{2a\,dx}{y} - \frac{2y\,dy}{u} - \frac{u\,dy}{y}$. Jam ponatur $dy = p\,dx$, minimum eſſe debebit $\int^p \frac{dx\sqrt{(yy+uu)}}{u}$, atque u eſt quantitas cujus valor ex hac æquatione $du = dx\left(\frac{2a}{y} - \frac{2yp}{u} - \frac{up}{y}\right)$ definiri debet. Pertinet itaque hæc quæſtio ad Caſum quintum; cum quo ſi comparatio inſtituatur, fit $u = \Pi$ & $Z = \frac{p\sqrt{(yy+\Pi^2)}}{\Pi}$, unde $L = \frac{-pyy}{\Pi^2\sqrt{(yy+\Pi^2)}}$; $M = 0$, $N = \frac{yp}{\Pi\sqrt{(yy+\Pi^2)}}$, & $P = \frac{\sqrt{(yy+\Pi\Pi)}}{\Pi}$. Deinde cum ſit $\Pi = \int dx\left(\frac{2a}{y} - \frac{2yp}{\Pi} - \frac{\Pi p}{y}\right)$, ſit $[Z] = \frac{2a}{y} - \frac{2yp}{\Pi} - \frac{\Pi p}{y}$, & differentiando erit $[L] = \frac{2yp}{\Pi^2} - \frac{p}{y}$; $[M] = 0$, $[N] = \frac{-2a}{yy} - \frac{2p}{\Pi} + \frac{\Pi p}{yy}$ & $[P] = \frac{-2y}{\Pi} - \frac{\Pi}{y}$. Jam erit $\int [L]dx = \int \frac{2y\,dy}{\Pi^2} = ly$, & $e^{\int [L]dx} = \frac{e^{\int 2ydy : \Pi\Pi}}{y}$; at eſt $L dx = \frac{-yy\,dy}{\Pi^2\sqrt{(yy+\Pi\Pi)}}$; unde fiet $\int e^{\int [L]dx} L\,dx = -\int \frac{e^{\int 2ydy : \Pi\Pi}\, y\,dy}{\Pi^2\sqrt{(yy+\Pi^2)}}$, cujus valor poſito $x = a$, fiat $= H$, ſitque $V = e^{-\int 2ydy : \Pi\Pi}{}_y\left(H + \int \frac{e^{\int 2ydy : \Pi\Pi}\, y\,dy}{\Pi^2\sqrt{(yy+\Pi^2)}}\right)$. His præparatis, erit æquatio ſatisfaciens $(N + [N]V)\,dx = d.(P + [P]V)$, ſive ſubſtitutionibus factis, $\frac{y\,dy}{\Pi\sqrt{(yy+\Pi\Pi)}} - \frac{2aV\,dx}{yy} - \frac{2V\,dy}{\Pi} - \frac{\Pi V dy}{yy} = d.\left(\frac{\sqrt{(yy+\Pi\Pi)}}{\Pi} - \frac{2Vy}{\Pi} - \frac{\Pi V}{y}\right)$. At eſt $2a\,dx = y\,d\Pi$

+

$+\frac{2yydy}{\Pi}+\Pi dy$; unde erit $\frac{ydy}{\Pi\sqrt{(yy+\Pi^2)}}-\frac{Vd\Pi}{y}-\frac{4Vdy}{\Pi}$ $=d.\left(\frac{\sqrt{(yy+\Pi^2)}}{\Pi}-\frac{2Vy}{\Pi}-\frac{\Pi V}{y}\right)=\frac{ydy}{\Pi\sqrt{(yy+\Pi^2)}}-$ $\frac{yyd\Pi}{\Pi^2\sqrt{(yy+\Pi^2)}}-\frac{2Vdy}{\Pi}-\frac{2ydV}{\Pi}+\frac{2Vyd\Pi}{\Pi^2}-\frac{\Pi dV}{y}-\frac{Vd\Pi}{y}$ $+\frac{\Pi Vdy}{yy}\Big)$; hincque $\frac{yyd\Pi}{\Pi^2\sqrt{(y^2+\Pi^2)}}-\frac{2Vdy}{\Pi}+\frac{2ydV}{\Pi}-\frac{2Vyd\Pi}{\Pi^2}$ $+\frac{\Pi dV}{y}-\frac{\Pi Vdy}{yy}=0$. Verum, eſt generaliter $dV=-Ldx$ $-V[L]dx$; unde erit $dV=\frac{yydy}{\Pi^2\sqrt{(yy+\Pi\Pi)}}-\frac{2Vydy}{\Pi^2}$ $+\frac{Vdy}{y}$; hincque $\frac{yyd\Pi}{\Pi^2\sqrt{(yy+\Pi\Pi)}}=\frac{dVd\Pi}{dy}+\frac{2Vyd\Pi}{\Pi^2}-$ $\frac{Vd\Pi}{y}$; quo ſubſtituto oritur $\frac{dVd\Pi}{dy}-\frac{2Vdy}{\Pi}+\frac{2ydV}{\Pi}+\frac{\Pi dV}{y}$ $-\frac{Vd\Pi}{y}-\frac{\Pi Vdy}{yy}=0$; hoc eſt $dV\left(\frac{d\Pi}{dy}+\frac{2y}{\Pi}+\frac{\Pi}{y}\right)$ $=V\left(\frac{d\Pi}{y}+\frac{2dy}{\Pi}+\frac{\Pi dy}{yy}\right)=\frac{ydV}{dy}\left(\frac{d\Pi}{y}+\frac{2dy}{\Pi}+\frac{\Pi dy}{yy}\right)$; quæ æquatio, cum ſit diviſibilis per $\frac{d\Pi}{y}+\frac{2dy}{\Pi}+\frac{\Pi dy}{yy}$, duplicem dat ſolutionem. Quarum prima erit $\frac{dV}{V}=\frac{dy}{y}$, quæ præbet $V=cy$: quoniam vero V evaneſcere debet in caſu minimi, eodem caſu erit $y=0$; ſcilicet poſito $x=a$ fiet $y=0$. Cum nunc ſit $V=cy$, facta ſubſtitutione in æquatione $dV=\frac{yydy}{\Pi^2\sqrt{(y^2+\Pi^2)}}-\frac{2Vydy}{\Pi^2}+\frac{Vdy}{y}$, erit $\frac{yydy}{\Pi^2\sqrt{(y^2+\Pi^2)}}$ $=\frac{2cyydy}{\Pi^2}$; hincque vel $y=0$, vel $dy=0$, quo caſu prodit linea recta axi parallela; vel $\Pi=\infty$, quo caſu prodit linea recta ad axem normalis: vel etiam $\sqrt{(yy+\Pi\Pi)}=MN=$ *Conſt.* quæ æquatio dat Circulum; atque integer ſemicirculus, ob $y=0$ in caſu minimi, quæſito ſatisfaciet. Secunda ſolutio prodit ex diviſore $\frac{d\Pi}{y}+\frac{2dy}{\Pi}+\frac{\Pi dy}{yy}=0$, ſeu $\Pi d\Pi+\frac{\Pi\Pi dy}{y}$ $+$

$+ 2ydy = o$, quæ multiplicata per yy, fit $yy\Pi d\Pi + \Pi\Pi ydy + 2y^3dy = o$, cujus integrale eſt $\Pi^2y^2 + y^4 = C$, hincque $\Pi = \frac{\sqrt{(b^4 - y^4)}}{y}$; quæ æquatio, quia non pendet ab V, pro quocunque valore ipſius x ſatisfaciet. Erit autem introducta abſciſſa $AP = t$, ob $u = \Pi = \frac{ydy}{dt}$, iſta æquatio $\frac{ydy}{dt} = \frac{\sqrt{(b^4 - y^4)}}{y}$, unde $dt = \frac{yydy}{\sqrt{(b^4 - y^4)}}$, ex qua æquatione intelligitur Elaſticam rectangulam quæſito ſatisfacere; ita ut pro area ANM inter normales AN & MN arcus curvæ AM ſit breviſſimus. Hæc autem curva per data duo puncta, ſiquidem axis AP ſit poſitione datus, deſcribi poteſt.

SCHOLION II.

13. Ex his Exemplis eximius uſus, quem habet noſtra Methodus in Problematis etiam diverſi generis reſolvendis, abunde patet; inprimis autem ultimum Exemplum nonnullas notatu maxime dignas ſuppeditat circumſtantias, ex quibus natura ſolutionis illuſtrari poterit. Quoniam enim duplex æquatio ob factores duos nata eſt, duplex quoque ſolutio prodiit; quarum prior lineam ſatisfacientem abſolute determinat, ita ut ea per data duo puncta duci nequeat: dat enim vel lineam rectam, vel ſemicirculum. Linea recta duplici modo quæſtionem ſolvit, dum eſt vel normalis ad axem AP, vel eidem parallela; & quemadmodum utraque ſatisfaciat manifeſtum eſt: nam in ea, quæ eſt normalis ad axem, portio quæ cum axe & normali datum ſpatium comprehendit perpetuo eſt infinite parva, ideoque revera minima: altera recta axi parallela aliquanto latius patet, cum ea per datum punctum duci poſſit; & quia ipſæ applicatæ ad eam ſunt normales, ac ſpatium abſciſſum ſit ut ipſa abſciſſa, ejus reſpectu linea illa recta utique erit breviſſima. Semicirculus deinde, qui ex prima ſolutione prodiit, ita abſolute ſatisfacit, ut, propoſita ſpatii abſcindendi quantitate, ipſe ſemircirculus determinetur,

netur, ejus enim area esse debet $= aa$. Secunda autem solutio quæ curvam Elasticam rectangulam præbuit, latius patet: nam per data duo quæcunque puncta ejusmodi curva traduci potest, eaque, inter omnes alias curvas per eadem puncta transeuntes, hac gaudebit prærogativa, ut si, in omnibus curvis, per normales, areæ æquales abscindantur, arcus Elasticæ futurus sit omnium minimus. His igitur expositis pergamus ad usum Methodi traditæ ostendendum, in iis maximi minimive investigationibus, in quibus maximi minimive formula non est talis expressio integralis simplex $\int Z dx$, qualem formam hactenus perpetuo tractavimus; verum est composita ex duabus pluribusve hujusmodi formulis quomodocunque. Ac primo quidem, si maximum minimumve esse debeat aggregatum duarum pluriumve formularum integralium, puta $\int Z dx + \int Y dx - \int X dx$, operatio nulla difficultate laborat: quia enim formula maximi minimive est $\int dx (Z + Y - X)$, hæc tanquam simplex formula integralis tractari, ejusque valor differentialis assignari poterit. Operatio autem eo redibit, ut pro singulis formulis $\int Z dx$, $\int Y dx$ & $\int X dx$, earum valores differentiales quærantur; earumque loco in formula $\int Z dx + \int Y dx - \int X dx$ substituantur; & quod oritur nihilo æquale ponatur: sicque habebitur æquatio quæsito satisfaciens.

PROPOSITIO II. PROBLEMA.

14. *Invenire æquationem inter* x & y, *ut, posito* $x = a$, *fiat hæc expressio* $\int Z\,dx \times \int Y\,dx$, *quæ est productum ex duabus formulis integralibus* $\int Z\,dx$ & $\int Y\,dx$, *maximum vel minimum.*

SOLUTIO.

Ponamus istam æquationem inter x & y jam esse inventam, foreque ex ea, posito $x = a$, valorem Formulæ $\int Z dx = A$, & $\int Y dx = B$; erunt hæ quantitates A & B constantes; atque earum productum AB maximum vel minimum. Jam ponatur apud valorem indefinitum x variabilem y augeri particula

$n\nu$, ex ea utraque quantitas A & B incrementum accipiet, unaquæque scilicet augebitur valore differentiali ex præcedentibus definiendo. Sit igitur dA valor differentialis ipsius A, qui respondet formulæ integrali $\int Z\,dx$, posito $x = a$, similique modo sit dB valor differentialis ipsius B oriundus ex formula $\int Y\,dx$, posito $x = a$. Cum ergo, ex adjecta particula $n\nu$ variabili y, abeat A in $A + dA$, & B in $B + dB$, productum AB transmutabitur in $AB + AdB + BdA + dAdB$; quare cum AB esse debeat maximum vel minimum, oportebit esse $AB = AB + AdB + BdA + dAdB$. Ideoque $0 = AdB + BdA$, ob evanescentem terminum $dAdB$ præ reliquis. Ex his itaque oritur sequens Problematis solutio; Quæratur formulæ $\int Z\,dx$ valor differentialis qui sit dA, sitque A valor formulæ $\int Z\,dx$, quem obtinet posito $x = a$. Deinde quæratur formulæ $\int Y\,dx$ valor differentialis, qui sit dB, ac B denotet valorem formulæ $\int Y\,dx$, quem recipit posito $x = a$: quibus factis habebitur ista æquatio $0 = AdB + BdA$, in qua relatio satisfaciens inter x & y continebitur. *Q. E. I.*

Coroll. I.

15. Quanquam in æquatione $0 = AdB + BdA$ insunt quantitates constantes A & B, tamen ea non sunt arbitrariæ, sed utraque per ipsam hanc æquationem definietur. Scilicet si ex hac æquatione eliciantur valores $\int Z\,dx$ & $\int Y\,dx$, ponatur ubi $x = a$, prodire debent illæ quantitates A & B; unde hæ determinabuntur per a, & per reliquas constantes arbitrarias quæ per integrationem ingredientur.

Coroll. II.

16. Si Z & Y fuerint functiones determinatæ quantitatum x, y, p, q, r, &c. tum valores differentiales dA & dB non pendebunt ab a; interim tamen quantitas a ingreditur in æquationem $0 = AdB + BdA$: ex quo curva inventa, tantum pro definito abscissæ x valore $x = a$, quæsito satisfaciet.

Co-

Digitized by Google

COROLL. III.

17. Ex æquatione autem $o = AdB + BdA$ particula n, omnino egredietur: nam quia uterque valor differentialis dA & dB per n, multiplicatus prodiit, iterum n, per divisionem exterminabitur: hocque modo æquatio inter x & y atque constantes nascetur, qua Problemati satisfiet.

SCHOLION I.

18. Neminem hic forma æquationis $o = AdB + BdA$ inventæ offendat, eo quod speciem formulæ differentialis definitæ præ se ferat, neque hinc etiam quisquam concludat æquationis $o = AdB + BdA$ integralem sumi posse hanc, *Const.* $= AB$. Jam enim significationes explicavimus, quas tribuimus cum litteris A & B, tum etiam formis differentialibus dA & dB: ex quo intelligere licet, vulgarem notandi modum hic non locum habere. Ideo autem hunc notandi modum, etsi a consueto dissentientem, hic adhibere visum est, ut nexus æquationis $o = AdB + BdA$ cum formula maximi minimive $\int Z dx . \int Y dx$ melius perspiciatur. Cum enim maximum minimumve respondere debeat valori $x = a$; ponamus hoc casu abire $\int Z dx$ in A & $\int Y dx$ in B; quo facto, maximum minimumve erit AB. Hinc autem sponte nascitur æquatio inventa $o = AdB + BdA$, siquidem AB, litteris A & B tanquam variabilibus spectatis, differentietur. Quod cum fuerit factum, in memoriam revocari oportet, pro differentialibus dA & dB accipiendos esse valores differentiales eos, qui conveniunt formulis integralibus $\int Z dx$ & $\int Y dx$, ex quibus ipsæ quantitates A & B constantes prodiere. Hunc nexum ideo annotasse juvabit, quod infra eundem ad quemcunque compositionis modum, quo formula maximi minimive ex formulis integralibus composita fuerit, æque patere; similique modo ex ipsa maximi minimive expressione per differentiationem æquationem quæsitam obtineri ostendemus.

EXEMPLUM I.

19. *Invenire æquationem inter* x *&* y, *ut, posito* x = a, *fiat ista expressio* $\int y\,dx \times \int x\,dy$ *maximum.*

Fiat $\int y\,dx = A$, & $\int x\,dy = B$, posito $x = a$, & quærantur formularum $\int y\,dx$ & $\int x\,dy$, seu $\int x\,p\,dx$, valores differentiales : ac formulæ $\int y\,dx$ valor differentialis est $nv.\,dx.\,1$, formulæ autem $\int x\,dy$, seu $\int x\,p\,dx$, est $nv.\,dx\,(-\frac{1}{dx}\,d.\,x) = -nv.\,dx$. Erit ergo $dA = nv.\,dx$, & $dB = -nv.\,dx$: unde æquatio $0 = A\,dB + B\,dA$ abibit in hanc $0 = -A.\,nv.\,dx + B.\,nv.\,dx$, seu $A = B$. Quæsito ergo omnes æquationes inter x & y æque satisfaciunt, dummodo, casu $x = a$, fuerit $\int y\,dx = \int x\,dy$; hoc est area curvæ $= \frac{1}{2}xy$.

EXEMPLUM II.

20. *Invenire æquationem inter* x *&* y, *ut, casu* x = a, *fiat maximum hæc expressio* $\int y\,dx \times \int dx\sqrt{(1+pp)}$.

Casu $x = a$, fiat $\int y\,dx = A$, & $\int dx\sqrt{(1+pp)} = B$. Porro sumendis valoribus differentialibus erit $dA = nv.\,dx.\,1$, & $dB = nv.\,dx\,(-\frac{1}{dx}\,d.\,\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}) = -nv.\,d.\,\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$

Hinc prodit sequens æquatio $0 = -A.\,nv.\,d\,\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} + B.\,nv.\,dx$, seu $B\,dx = A\,d.\,\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quæ integrata dat $x + b = \frac{Ap}{B\sqrt{(1+pp)}}$, ubi $\frac{A}{B}$ denotat rationem, quam tenet $\int y\,dx$ ad $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ tum cum fit $x = a$. Sit brevitatis gratia $\frac{A}{B} = c$, erit $(x+b)\sqrt{(1+pp)} = cp$, & $p = \frac{x+b}{\sqrt{(cc-(x+b)^2)}} = \frac{dy}{dx}$. Integrata ergo hac æquatione,

tione, reſultabit $y = f \pm \sqrt{(cc - (x+b)^2)}$, ita ut ſit $(y-f)^2 + (x+b)^2 = c^2$, unde patet curvam ſatisfacientem eſſe Circulum, radio c deſcriptum, axe ubicunque accepto. Hujuſmodi vero Circuli non quivis arcus ſatisfaciet, verum is tantum qui per c radium Circuli multiplicatus producat aream; eſt enim $A = Bc$. Ergo vel radius Circuli c pro lubitu accipi poteſt, ex eoque definietur illa abſciſſæ x magnitudo determinata a; vel ſi a detur, ut ponimus, inde viciſſim radius c determinabitur. Perſpicuum autem eſt arcum Circuli, qui ſatisfacit, convexitate ſua axem reſpicere debere; hoc enim caſu area fit minor, ideoque productum ex area in arcum minimum.

EXEMPLUM III.

21. *Invenire curvam, in qua, pro data abſciſſa* $x = a$, *minimum fiat hæc expreſſio* $\int y x \, dx \times \int x \, dx \sqrt{(1+pp)}$.

Poſito $x = a$, fiat $\int y x \, dx = A$, & $\int x \, dx \sqrt{(1+pp)} = B$. Erit autem $dA = n y . dx . x$ & $dB = -m . dx . \frac{1}{dx}$ $d . \frac{xp}{\sqrt{(1+pp)}}$; unde obtinebitur iſta æquatio $B x \, dx = A \, d . \frac{px}{\sqrt{(1+pp)}}$, quæ integrata dat $xx \pm bb = \frac{2Apx}{B\sqrt{(1+pp)}} = \frac{2cpx}{\sqrt{(1+pp)}}$, poſito $\frac{A}{B} = c$. Hinc $p = \frac{xx \pm bb}{\sqrt{(4ccxx - (xx \pm bb)^2)}} = \frac{dy}{dx}$, ideoque pro curva habebitur hæc æquatio, $y = \int \frac{(xx \pm bb) \, dx}{\sqrt{(4ccxx - (xx \pm bb)^2)}}$. De qua notandum eſt, ſi fiat $b = 0$, tum prodire æquationem pro Circulo $y = \int \frac{x \, dx}{\sqrt{(4cc - xx)}}$, cujus radius ſit $2c$.

SCHOLION II.

22. Eadem hæc Exempla omnia quoque resolvi possunt per Methodum supra jam traditam; quare cum utraque via eadem solutio obtineatur, juvabit solutionem per alteram viam uno Exemplo exhiberi. Sumamus igitur tertium Exemplum, in quo maximi minimive formula $\int y\,x\,dx \times \int x\,dx\sqrt{(1+pp)}$, differentiando iterumque integrando per partes, reducitur ad hanc formam $\int y\,x\,dx \int x\,dx\sqrt{(1+pp)} \div \int x\,dx\sqrt{(1+pp)} \int y x dx$; cujus utrumque membrum in Casu secundo supra §. 7. exposito continetur. Quæratur itaque utriusque valor differentialis, eorum enim summa, posita $= 0$, dabit æquationem pro curva quæsita. Formula autem $\int y\,x\,dx \int x\,dx\sqrt{(1+pp)}$ cum Casu secundo collata, dabit $\Pi = \int x\,dx\sqrt{(1+pp)}$ & $Z = y \times \Pi$; unde fit $L = y\,x$; $M = y\,\Pi$, $N = x\,\Pi$, $P = 0$, &c. Deinde erit $[Z] = x\sqrt{(1+pp)}$; indeque $[M] = \sqrt{(1+pp)}$, $[N] = 0$, & $[P] = \frac{x\,p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Porro est $\int L\,dx = \int y x dx$, cujus valor, posito $x = a$, quem generaliter posuimus H, hic in solutione Exempli est A; ita ut sit $V = A - \int y\,x\,dx$. Quare hujus formulæ valor differentialis erit $= n v.\,dx\,(x\,\Pi - \frac{1}{dx}\,d.\,\frac{x p (A - \int y\,x\,dx))}{\sqrt{(1+pp)}} = n v.\,dx\,(x \int x\,dx\sqrt{(1+pp)} - \frac{A}{dx}\,d.\,\frac{x\,p}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{1}{dx}\,d.\,\frac{x\,p \int y\,x\,dx}{\sqrt{(1+pp)}})$. Altera formula $\int x\,dx\sqrt{(1+pp)} \int y\,x\,dx$, cum Casu secundo §. 7. collata, dat $\Pi = \int y x\,dx$ & $Z = x\,\Pi\sqrt{(1+pp)}$, unde erit $L = x\sqrt{(1+pp)}$, $M = \Pi\sqrt{(1+pp)}$, $N = 0$, & $P = \frac{x\,\Pi\,p}{\sqrt{(1+pp)}}$; hincque $\int L\,dx = \int x\,dx\sqrt{(1+pp)}$: quare cum H sit valor ipsius $\int L\,dx$, posito $x = a$, erit $H = B$, & $V = B - \int x\,dx\sqrt{(1+pp)}$. Porro est $[Z] = y\,x$, hincque $[M] = y$, $[N] = x$, & $[P] = 0$. Ex his prodit valor differentialis $= n v.\,dx\,(Bx - x \int x\,dx\sqrt{(1+pp)} - \frac{1}{dx} \times$

d.

$\times d.\frac{xp\int y\,x\,dx}{\sqrt{(1+pp)}}$). His igitur valoribus differentialibus ambobus additis, emerget hujus expreſſionis compoſitæ $\int y\,x\,dx \int x\,dx \sqrt{(1+pp)} + \int x\,dx \sqrt{(1+pp)} \int y\,x\,dx$, ſeu hujus $\int y\,x\,dx : \int x\,dx \sqrt{(1+pp)}$, quæ in Exemplo erat propoſita, valor differentialis $= nv.\,dx\,(Bx - \frac{A}{dx}\,d.\frac{xp}{\sqrt{(1+pp)}})$, ex quo pro curva æquatio erit hæc $Bx\,dx = A\,d.\frac{xp}{\sqrt{(1+pp)}}$, quam eandem in ſolutione Exempli invenimus. Similis autem conſenſus in genere deprehendetur, ſi quis expreſſionem $\int Z\,dx \times \int Y\,dx$ eodem modo tractare voluerit.

PROPOSITIO III. PROBLEMA.

23. *Invenire æquationem inter* x *&* y *ejus conditionis, ut, poſito* $x = a$, *iſta fractio* $\frac{\int Z\,dx}{\int Y\,dx}$ *obtineat maximum minimumve valorem: exiſtentibus* Z *&* Y *functionibus quibuſcunque ipſarum* x, y, p, q, r, *&c. ſive determinatis, ſive indeterminatis.*

SOLUTIO.

Caſu quo fit $x = a$, ſit $\int Z\,dx = A$, atque $\int Y\,dx = B$: eritque $\frac{A}{B}$ maximum vel minimum, ſiquidem relatio inter x & y recte fuerit aſſignata. Erit igitur fractio $\frac{A}{B}$ æqualis eidem huic fractioni $\frac{\int Z\,dx}{\int Y\,dx}$, caſu quo $x = a$, ſi alicubi una applicata y augeatur particula nv. Tum vero fiet $\int Z\,dx$ æqualis ipſi A, una cum valore differentiali formulæ $\int Z\,dx$, qui ſit $= dA$; ſimilique modo $\int Y\,dx$ abibit in B auctum valore differentiali formulæ $\int Y\,dx$, qui ſit $= dB$; ſicque ex adjecta particula nv ad applicatam y, caſu quo $x = a$, tranſibit fractio $\frac{\int Z\,dx}{\int Y\,dx}$ in hanc $\frac{A+dA}{B+dB}$; quæ æqualis eſſe debet fractioni

A

$\frac{A}{B}$; unde naſcitur iſta æquatio $B\,dA = A\,dB$; quæ præbebit æquationem inter x & y quæſitam. *Q. E. I.*

COROLL. I.

24. Ad hanc igitur æquationem inter x & y inveniendam, effici debet ut valores differentiales ipſarum $\int Z\,dx$ & $\int Y\,dx$ proportionales fiant ipſis harum formularum valoribus, quos obtinent poſito $x = a$.

COROLL. II.

25. Quanquam, in hac æquatione inventa $B\,dA = A\,dB$, duæ ineſſe videantur conſtantes incognitæ A & B, tamen ambas in unam compingere licet. Poſito enim $\frac{A}{B} = C$, erit $dA = C\,dB$; inventaque æquatione, ex valore a loco x ſubſtituto determinabitur valor ipſius C.

SCHOLION.

26. Si hujus & præcedentis Problematis ſolutiones inter ſe conferantur, ingens in iis deprehendetur conſenſus. Nam ſi maximum minimumve eſſe debeat factum $\int Z\,dx \times \int Y\,dx$, orta eſt iſta æquatio $0 = A\,dB + B\,dA$; ſin autem quotus $\frac{\int Z\,dx}{\int y\,dx}$ debeat eſſe vel maximus vel minimus, inventa eſt iſta æquatio $0 = A\,dB - B\,dA$; utroque autem caſu litteræ A, B & dA, dB eoſdem retinent valores. Quare cum A & B ſint quantitates conſtantes, ambæ æquationes tantum ratione ſigni conſtantis differunt; poſito enim $\frac{A}{B} = C$, priore caſu habetur $dA = -CdB$, poſteriore vero $dA = +C\,dB$. Ex quo pro utroque caſu etiam eadem fere prodibit ſolutio; quia totum diſcrimen tantum in ſigno quantitatis conſtantis C ſitum erit. Quod ſi ergo æquatio inter x & y fuerit inventa, quæ conti-

Digitized by Google

contineat, pro $x = a$, factum $\int Z dx \times \int \Upsilon dx$ maximum vel minimum; eadem æquatio, levi adhibita mutatione, simul continebit quotum $\frac{\int Z dx}{\int \Upsilon dx}$ maximum vel minimum. Perspicuum autem est, sive $\frac{\int Z dx}{\int \Upsilon dx}$ debeat esse maximum vel minimum, sive $\frac{\int \Upsilon dx}{\int Z dx}$, utroque casu eandem plane esse prodituram æquationem. Hanc vero convenientiam ipsa rei natura postulat: nam si $\frac{\int Z dx}{\int \Upsilon dx}$ est maximum, tum eo ipso erit $\frac{\int \Upsilon dx}{\int Z dx}$ minimum & vicissim; unde utrique quæstioni eandem solutionem satisfacere necesse est. Cæterum hunc quoque nexum observasse juvabit inter maximi minimive formulam $\frac{\int Z dx}{\int \Upsilon dx}$, quæ, posito $x = a$, abit in $\frac{A}{B}$, & inter æquationem inventam $B dA - A dB = 0$: hæc enim æquatio oritur ex differentiatione formulæ $\frac{A}{B}$, ponendo ejus differentiale $= 0$; istiusmodi autem nexum perpetuo locum habere in sequente Propositione demonstrabimus.

EXEMPLUM I.

27. *Invenire curvam, cujus area coordinatis orthogonalibus abscissa ad arcum curvæ maximam teneat rationem, si abscissæ datus valor* a *tribuatur.*

Posita curvæ quæsitæ abscissa $= x$, applicata $= y$; erit area $= \int y dx$, & arcus $= \int dx \sqrt{(1 + pp)}$; posito $dy = p dx$: maximum ergo esse debet $\frac{\int y dx}{\int dx \sqrt{(1 + pp)}}$, casu quo ponitur $x = a$. Sit igitur, casu $x = a$, valor formulæ $\int y dx$, seu area $= A$, & $\int dx \sqrt{(1 + pp)}$ seu arcus abscissæ a respondens $= B$. Deinde formulæ $\int y dx$ valor differentialis dA erit $= ny. dx$.

1, & formulæ $\int dx \sqrt{(1+pp)}$ seu $dB = n\nu.\ dx\ (-\frac{1}{dx}$ $d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}) = -n\nu.\ d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quibus valoribus in æquatione $B\,dA = A\,dB$ substitutis, prodibit pro curva quæsita sequens æquatio: $B\,dx = -A\,d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Ponatur $\frac{A}{B} = c$, ita ut, pro abscissa $x = a$, area curvæ fiat æqualis producto ex arcu in hanc constantem c. Erit ergo $dx = -c\,d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, & integrando $x = b - \frac{cp}{\sqrt{(1+pp)}}$, seu $cp = (b-x)\sqrt{(1+pp)}$, hincque $p = \frac{b-x}{\sqrt{(c^2-(b-x)^2)}} = \frac{dy}{dx}$. Erit ergo $y = \ldots$ $\int \frac{(b-x)\,dx}{\sqrt{(c^2-(b-x)^2)}} = f \pm \sqrt{(c^2-(b-x)^2)}$ seu $(y-f)^2 + (b-x)^2 = cc$; unde constat curvam quæsitam esse Circulum radio c descriptum, ad rectam quamcunque tanquam axem relatum. Hujus autem Circuli ea tantum portio quæsito satisfacit, quæ respondet abscissæ $= a$, a quo valore pendet c, ita ut sumpta abscissa $= a$, area æqualis fiat producto ex arcu in radium Circuli multiplicato. Quod si ergo viciſſim radius c detur, tanta in axe abscissa abscindi debet, ut arcus per radium multiplicatus præbeat aream. Infinitis igitur modis quæsito satisfieri potest; quæstio autem erit determinata, si duo præscribantur puncta, per quæ curva quæsita sit transeunda. Sumamus igitur radium c tanquam cognitum, eoque describamus Circulum BMD centro C. Porro sumatur linea quæcunque APD pro axe, in eaque A pro origine abscissarum. Hoc jam facto, quæstioni satisfiet si applicata PM tantum spatium ABMP abscindatur, ut id sit æquale producto ex arcu BM in radium Circuli BC. Quia autem sector BCM est $= \frac{1}{2}$ BM. BC, oportet aream ABMP esse duplo majorem sectore BCM. Apparet autem, sumto pro lubitu,

Fig. 12.

Digitized by Google

bitu, cum axe, tum ejus initio, ſæpe-numero conditionem præſcriptam nequidem impleri poſſe. Nam ſi axis AD per centrum tranſeat, tum area ABMP perpetuo minor erit quam duplum ſectoris BCM; niſi, arcu BM infinite parvo, prima applicata BA ſimul per centrum tranſeat: ſin autem axis AD ſupra centrum tranſiret, tum nullo modo conditioni inventæ ſatisfieri poteſt. Quare neceſſe eſt, ut axis AD infra centrum C ducatur, qua de re multæ egregiæ obſervationes geometricæ fieri poſſent, ſi ratio inſtituti id permitteret. Cæterum ſi hæc Solutio cum Exemplo ſecundo præced. Prop. §. 20 comparetur; apparebit eandem prorſus æquationem eſſe inventam, ſive $\int y\,dx \times \int dx\sqrt{(1+pp)}$ debeat eſſe minimum, ſive $\frac{\int y\,dx}{\int dx\sqrt{(1+pp)}}$ maximum. Diſcrimen tamen in hoc conſiſtit; quod radius Circuli $c = \frac{A}{B}$ altero caſu affirmative, altero negative debeat accipi. Scilicet ſi $\int y\,dx \times \int dx\sqrt{(1+pp)}$ debeat eſſe minimum, arcus BM convexitate ſua ſpatium ABMP; altero autem caſu, concavitate claudere debet.

EXEMPLUM II.

28. *Intra datum angulum* ACM, *curvam* AM *conſtruere ita comparatam, ut area* ACM *per arcum* AM *diviſa ſit omnium maxima.* Fig. 7.

Ponatur angulus ACM, ſeu arcus circuli BS radio CB $= 1$ deſcriptus $= x$, qui in caſu propoſito fiat $= a$, quo $\frac{ACM}{AM}$ fieri debet maximum. Ponatur porro $CM = y$, ſitque $dy = p\,dx$, erit $Mn = y\,dx$, & area $ACM = \frac{1}{2}\int yy\,dx$: arcus autem AM reperitur $= \int dx\sqrt{(yy+pp)}$: unde hæc fractio $\frac{\int yy\,dx}{2\int dx\sqrt{(yy+pp)}}$, ſeu ejus duplum $\frac{\int yy\,dx}{\int dx\sqrt{(yy+pp)}}$ debebit eſſe maximum. Sit, caſu quo $x = a$

est, $\int y\,y\,dx = A$, & $\int dx\sqrt{(yy+pp)} = B$; erit, si $x = a$, area ACM $= \frac{1}{2}A$, & arcus AM $= B$. Jam formulæ $\int y\,y\,dx = A$ valor differentialis dA est $= n\,y.\,dx.\,2y$, & formulæ $\int dx\sqrt{(yy+pp)}$ valor differentialis dB est $= n\,y.\,dx\left(\frac{y}{\sqrt{(yy+pp)}} - \frac{1}{dx}\,d.\,\frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}}\right)$. Quare cum generaliter invenerimus pro curva hanc æquationem $B\,dA = A\,dB$, erit divisione per $n\,y$ instituta, $2By\,dx = \frac{A\,y\,dy}{\sqrt{(yy+pp)}} - A\,d.\,\frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}}$. Multiplicetur ea per p, ob $p\,dx = dy$, erit $2By\,dy = A\left(\frac{y\,dy}{\sqrt{(yy+pp)}} - p\,d\,\frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}}\right)$. At est $d.\sqrt{(yy+pp)} = \frac{y\,dy}{\sqrt{(yy+pp)}} + \frac{p\,dp}{\sqrt{(yy+pp)}}$ & $\frac{y\,dy}{\sqrt{(yy+pp)}} = d.\sqrt{(yy+pp)} - \frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}}.\,dp$; unde fiet $2By\,dy = A\left(d.\sqrt{(yy+pp)} - d.\,\frac{pp}{\sqrt{(yy+pp)}}\right)$, ob $p\,d\,\frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}} + dp\,\frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}} = d.\,p.\,\frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}} = d.\,\frac{pp}{\sqrt{(yy+pp)}}$. Quare integrando habebitur, si $\frac{A}{B} = c$ ponatur, ista æquatio $yy \pm bb = c\sqrt{(yy+pp)} - \frac{c\,pp}{\sqrt{(yy+pp)}} = \frac{c\,yy}{\sqrt{(yy+pp)}}$ seu $p = \frac{y\sqrt{(c^2y^2 - (yy \pm bb)^2)}}{yy \pm bb} = \frac{dy}{dx}$; hincque $dx = \frac{(yy \pm bb)\,dy}{y\sqrt{(c^2y^2 - (yy \pm bb)^2)}}$: ex qua æquatione facile deduci potest, si sit $cc + 4bb$ quantitas positiva, constructionem per quadraturam Circuli absolvi posse. At idem facilius patebit, si loco dx, vel p, introducamus perpendiculum CP, ex C in tangentem MP demissum. Quod si autem hoc perpendiculum CP ponatur $= u$, erit $y : u = dx\sqrt{(yy+pp)} : y\,dx$, hincque $\frac{yy}{\sqrt{(yy+pp)}} = u$; quamobrem

brem cum esset $yy \pm bb = \frac{cyy}{\sqrt{(yy+pp)}}$ erit $yy \pm bb = cu$, quam constat esse aquationem ad ipsum Circulum. Hoc ut ostenda- *Fig. 13.*
mus, sumatur Circulus quicunque, centro O, radio $OM = g$ descriptus, punctumque C sumtum sit in C, ita ut sit $OC = b$. Jam ducta recta $CM = y$, & $CP = u$, perpendiculari in tangentem MP, erit CP parallela radio OM. Ex M ducatur diametro EF parallela MR, erit $MR = CO = b$; $CR = OM = g$, & $PR = u - g$: quia igitur est $MR^2 = MP^2 + PR^2 = CM^2 - CP^2 + PR^2$, erit $b^2 = y^2 - u^2 + (u-g)^2 = y^2 - 2gu + gg$: hinc que $yy + gg - bb = 2gu$; quæ comparata cum inventa $yy \pm bb = cu$, fiet $g = \frac{1}{2}c$, & $\pm bb = \frac{1}{4}cc - bb$, seu $bb = \frac{1}{4}cc \mp bb$. Erit itaque curva quæsita Circulus, radio $= \frac{1}{2}c$ descriptus, puncto C ubi libuerit accepto. In tali Circulo quæsito satisfaciet arcus AM, si fuerit $\frac{ACM}{AM} = \frac{A}{2b} = \frac{1}{2}c =$ radio OM; hoc est si fuerit area ACM = arc. AM. AO = duplici sectori AOM. Hoc autem fieri nequit, nisi punctum C extra Circulum accipiatur; quo casu hæc conditio infinitis modis adimpleri potest; atque adeo effici ut curva satisfaciens per data duo puncta transeat.

EXEMPLUM III.

29. *Invenire curvam* DAD *ad axem* AC *relatam, in qua* *Fig. 14.*
pro data abscissa $AC = a$, *sit* $\frac{\int x dx \sqrt{(1+pp)}}{\int dx \sqrt{(1+pp)}}$ *minimum.*

Si ponatur abscissa indefinita $AP = x$, applicata $PM = y$, & $dy = p\,dx$; exprimit $\frac{\int x dx \sqrt{(1+pp)}}{\int dx \sqrt{(1+pp)}}$ distantiam centri gravitatis curvæ MAM, tanquam uniformiter gravis spectatæ a puncto infimo A; quæ ergo distantia, translato P in C, debet esse minima. Ad hoc inveniendum, posito $x = a$, sit $\int x dx \sqrt{(1+pp)} = A$, & $\int dx \sqrt{(1+pp)} = B$: formulæ autem $\int x dx \sqrt{(1+pp)}$

reperitur valor differentialis $dA = -nr.d.\frac{xp}{\sqrt{(1+pp)}}$, & formulæ $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ valor differentialis $dB = -nr.d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$; quibus in æquatione $BdA = AdB$ ſubſtitutis, prodibit $Bd.\frac{xp}{\sqrt{(1+pp)}} = Ad.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, & poſito $\frac{A}{B} = c$, erit $d.\frac{xp}{\sqrt{(1+pp)}} = c\,d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$; unde integrando oritur $\frac{xp}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{cp}{\sqrt{(1+pp)}} - b$, ſeu $b\sqrt{(1+pp)} = (c-x)p$; hincque elicitur $p = \frac{b}{\sqrt{((c-x)^2 - bb)}} = \frac{dy}{dx}$. Erit ergo $y = \int \frac{b\,dx}{\sqrt{((c-x)^2 - b^2)}}$; quæ æquatio indicat curvam quæſitam eſſe Catenariam, initio abſciſſarum pro x in loco axis AC quocunque accepto: quin etiam pro axe ſumi poteſt recta quæcunque diametro Catenariæ AC parallela, in eaque punctum quodcunque pro axis initio. Quomodocunque autem axis, ejuſque initium conſtituatur, quæſtioni ſatisfiet ea tantum curvæ portio, ubi fit $\int x\,dx\sqrt{(1+pp)} = c\int dx\sqrt{(1+pp)}$. Ponamus pro axe ipſam diametrum AC, & verticem A pro initio abſciſſarum accipi. Quia in A, ubi eſt $x = 0$, fit $\frac{dy}{dx} = p = \infty$, neceſſe eſt ut ſit $cc - bb = 0$, ideoque $b = c$. Verum hoc caſu fit $y = \int \frac{c\,dx}{\sqrt{(2cx - xx)}}$, quæ curva ſurſum directa fit imaginaria, donec fiat $x > 2c$. Sit ergo $x = 2c + t$, erit $t =$ abſciſſæ AP, & $y =$ PM $= \int \frac{c\,dt}{\sqrt{(2ct + tt)}}$; curvaque DAD erit catenaria ordinaria. Quo autem appareat quanta ejus portio quæſtioni ſatisfaciat, notandum eſt, ob $dx = dt$, eſſe $p = \frac{c}{\sqrt{(2ct+tt)}}$, & $\sqrt{(1+pp)} = \frac{c+t}{\sqrt{(2ct+tt)}}$; hincque $\int dx\sqrt{(1+pp)} = \int \frac{(c+t)\,dt}{\sqrt{(2ct+tt)}} = \sqrt{(2ct+tt)}$. At ipſa expreſſio $\frac{\int x dx\sqrt{(1+pp)}}{\int dx\sqrt{(1+pp)}}$ fit

fit $= 2c + \frac{\int t\,dt\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(2ct+tt)}}$, quæ ipſi c æqualis fieri nullo modo poteſt. Ex quo concluditur nullam curvæ hujus portionem quæſito præ reliquis magis ſatisfacere. Quamobrem initium abſciſſarum non ſumi poteſt in vertice A. Sumatur ergo in alio quocunque puncto, poſitaque $AP = t$, fieri debet $2bt + tt = (c - x)^2 - bb$; unde fit, vel $b + t = x - c$, vel $b + t = c - x$. Prior æquatio $x = b + c + t$ locum habere nequit; quia, ob $dx = dt$, fieri non poteſt $\frac{\int x\,dt\sqrt{(1+pp)}}{\int dt\sqrt{(1+pp)}}$ ſeu $(b + c + \frac{\int t\,dt\sqrt{(1+pp)}}{\int dt\sqrt{(1+pp)}}) = c$. Ergo fiat $x = c - b - t$, quo caſu abſciſſæ ab aliquo puncto axis AC ſuperiori deorſum deſcendent: fierique deberet $\frac{\int x\,dx\sqrt{(1+pp)}}{\int dx\sqrt{(1+pp)}}$ ſeu $c - b - \frac{\int t\,dt\sqrt{(1+pp)}}{\int dt\sqrt{(1+pp)}} = c$, quod pariter fieri nequit; ex quo concludendum eſt, nullam portionem magis quam aliam quamvis ſatisfacere. Hoc autem inde venire videtur, quod Catenaria duas habet partes conjugatas veluti Hyperbola conica, hincque ſemper fieri poteſt $\frac{\int x\,dx\sqrt{(1+pp)}}{\int dx\sqrt{(1+pp)}} = 0$, qui eſt valor minimus. Hoc clarius confirmari poteſt ex valore invento $p = \frac{b}{\sqrt{((c-x)^2 - b^2)}}$; unde fit $\sqrt{(1+pp)} = \frac{c-x}{\sqrt{((c-x)^2 - b^2)}} = (c-x)r$, poſito brevitatis gratia $r = \frac{1}{\sqrt{((c-x)^2 - b^2)}}$. Oporteret ergo in caſu quæſito eſſe $\frac{\int (c-x)x\,r\,dx}{\int (c-x)r\,dx} = c$ ſeu $\int (c-x)^2 r\,dx = 0$, quod cum caſu $x = 0$ evaneſcere debeat, alio inſuper caſu evaneſcere deberet. At eſt $\int (c-x)^2 r\,dx = \int \frac{(c-x)^2\,dx}{\sqrt{((c-x)^2 - b^2)}}$ $= -\frac{1}{2}(c-x)\sqrt{((c-x)^2 - b^2)} - \frac{bb}{2}l\,\frac{c-x+\sqrt{((c-x)^2 - b^2)}}{c+\sqrt{(c^2-b^2)}}$ $+ \frac{1}{2}c\sqrt{(c^2 - b^2)}$, quæ expreſſio, cum ſemel fuit $= 0$; poſt, ob $(c-x)^2$ perpetuo affirmativum, continuo creſcet neque demum

Digitized by Google

nuo fieri poteſt $= 0$. Quamobrem ambos terminos integrationis formulæ $\int \frac{(c-x)^2 dx}{\sqrt{(c-x)^3-b^2)}}$ inter ſe congruere oportet; quod evenit ſi fuerit $x = c$: quo caſu curva ſatisfaciens abit in lineam rectam axi normalem, quæ utique centrum ſuum gravitatis a ſe minime habet remotum.

EXEMPLUM IV.

30. *Invenire curvam, in qua, pro data abſciſſa* $x = a$, *ſit haec expreſſio* $\frac{\int y x dx}{\int dx \sqrt{(1+pp)}}$ *maximum vel minimum.*

Poſito $x = a$, fiet $\int y x dx = A$, & $\int dx \sqrt{(1+pp)} = B$. Jam formulæ $\int y x dx$ valor differentialis eſt $dA = nv. dx. x = nv. x dx$, & formulæ $\int dx \sqrt{(1+pp)}$ valor differentialis eſt $dB = -nv. d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quare cum ſit $B dA = A dB$, habebitur iſta æquatio $Bx dx = -d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, ſeu $x dx = -cc d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, poſito $A = Bc^2$. Unde integrando obtinebitur $xx = C - \frac{2cc}{\sqrt{(1+pp)}}$, hincque $p = \frac{bc-xx}{\sqrt{(4c^4-(bc-xx)^2)}} = \frac{dy}{dx}$; quæ præbet $y = \int \frac{(bc-xx) dx}{\sqrt{(4c^4-(bc-xx)^2)}}$, quæ eſt æquatio generalis pro curva Elaſtica: cujus hæc proprietas, quod radius oſculi ubique abſciſſæ x ſit reciproce proportionalis: id quod patet ex æquatione $x dx = -cc d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, quæ abit in $\frac{-dx}{d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}} = \frac{cc}{x}$, eſtque $\frac{-dx}{d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}} = -\frac{dx(1+pp)^{3:2}}{dp}$ radius oſculi in curva. Hujus autem curvæ tanta portio ab initio computando ſatisfacit, in qua erit $\int y x dx =$

$= cc\int dx\sqrt{(1+pp)} = 2c^4\int\frac{dx}{\sqrt{(4c^4-(bc-xx)^2)}}$; quæ determinatio eo revocatur, ut effici debeat $\int dx\sqrt{(4c^4-(bc-xx)^2)} = (aa-bc)\int\frac{dx(bc-xx)}{\sqrt{(4c^4-(bc-xx)^2)}}$, si post integrationem utramque ponatur $x = a$. Hoc itaque modo constans illa c per a determinabitur.

PROPOSITIO IV. PROBLEMA.

31. *Invenire æquationem inter binas variabiles* x *&* y *ita comparatam, ut, posita variabili* $x = a$, *maximum minimumve fiat expressio* W, *quæ sit functio quæcunque formularum integralium*, $\int Z\,dx$, $\int Y\,dx$, $\int X\,dx$, *&c. in quibus denotent* Z, Y, X *&c. functiones quascunque ipsarum* x, y, p, q, *&c. sive, determinatas, sive indeterminatas.*

SOLUTIO.

Ponamus idoneam æquationem inter x & y jam esse inventam, positoque $x = a$, fieri $\int Z\,dx = A$; $\int Y\,dx = B$; $\int X\,dx = C$ &c. hisque valoribus in expressione W substitutis, habebitur revera maximum vel minimum. Quod si igitur altera variabilis y in uno loco particula n augeri ponatur, atque nascentes hinc mutationes in singulis formulis $\int Z\,dx$, $\int Y\,dx$, $\int X\,dx$ &c. introducantur, idem pro W valor prodire debet. At ab illa particula n formulæ $\int Z\,dx$, $\int Y\,dx$, & $\int X\,dx$ &c. quæque suis valoribus differentialibus augebuntur. Si ergo ponatur formulæ $\int Z\,dx$ valor differentialis $= dA$, formulæ $\int Y\,dx = dB$, formulæ $\int X\,dx = dC$, &c. loco quantitatum A, B, C, &c. orientur a particula n istæ auctæ $A+dA$, $B+dB$, $C+dC$ &c. quæ in W substitutæ eundem valorem producere debent, quem ipsæ A, B, C, &c. Ponamus, $A+dA$, $B+dB$, $C+dC$ &c. loco $\int Z\,dx$, $\int Y\,dx$, $\int X\,dx$ &c. substitutis, prodire $W+dW$; eritque $W+dW = W$, ideoque $dW = 0$. Hic autem valor dW, ut ex differentiationis natura liquet, inveni-

tur, si quantitas W, postquam in illa, loco formularum integrálium, litteræ A, B, C &c. sunt substitutæ, differentietur, his ipsis litteris A, B, C, &c. tanquam variabilibus tractatis; in hocque differentiali, dA, dB, dC &c. valores differentiales formularum respondentium $\int Z dx$, $\int Y dx$, $\int X dx$ &c. designent. Hac igitur significatione sumptum differentiale quantitatis propositæ W, si id nihilo æquale ponatur, dabit æquationem inter x & y quæsitam. Q. E. I.

Coroll. I.

32. Si ergo proposita fuerit ejusmodi expressio W functio formularum integralium $\int Z dx$, $\int Y dx$, $\int X dx$ &c. quæ, pro determinato ipsius x valore $= a$, debeat esse maximum vel minimum: tum loco formularum $\int Z dx$, $\int Y dx$, $\int X dx$ &c. scribantur litteræ A, B, C, &c. quo facto, expressio W differentietur his litteris A, B, C, &c. solis tanquam variabilibus tractatis, atque differentiale ponatur $= 0$.

Coroll. II.

33. In hoc differentiali, in quo inerunt litteræ A, B, C, &c. cum suis differentialibus dA, dB, dC &c. litteræ A, B, C &c. denotabunt respective valores formularum $\int Z dx$, $\int Y dx$, $\int X dx$ &c. quos induunt posito $x = a$; at differentialia dA, dB, dC, &c. exprimunt valores differentiales earundem formularum integralium abscissæ $x = a$ respondentes.

Coroll. III.

34. Ex præcedentibus autem apparet, si Z, Y, X &c. fuerint functiones determinatæ quantitatum x, y, p, q, &c. tum valores differentiales dA, dB, dC, &c. non a valore a pendere: contra vero si Z, Y, X &c. fuerint functiones indefinitæ, tum valores differentiales dA, dB, dC &c. simul a valore a pendere debere.

Co-

Digitized by Google

COROLL. IV.

35. Cum igitur hoc modo W fiat functio litterarum A, B, C, &c. ejus differentiale hujuſmodi habebit formam $FdA + GdB + HdC +$ &c. hincque æquatio quæſita erit $0 = FdA + GdB + HdC +$ &c. ubi F, G, H &c. erunt quantitates conſtantes, per A, B, C &c. determinatæ.

COROLL. V.

36. Æquatio ergo Problemati ſatisfaciens, conſtabit ex valoribus differentialibus ſingularum formularum integralium in maximi minimive expreſſione W contentarum, ſingulis per conſtantes quantitates determinatas multiplicatis: horum ſcilicet productorum aggregatum nihilo æquale poſitum dabit æquationem deſideratam.

SCHOLION I.

37. Potuiſſemus hanc Problema propoſitum reſolvendi methodum, ex ſolutionibus binorum Problematum præcedentium, per inductionem, jam concludere: quippe ex quibus jam patebat, ſi fuerit maximi minimive formula W, vel productum ex duabus formulis integralibus, vel quotus ex diviſione unius per alteram ortus, tum differentiale expreſſionis W modo expoſito ſumtum præbere æquationem Problemati convenientem. Præſtitit autem hoc Problema, ob ſummam ejus extenſionem, ſingulari ſolutione munire. In hoc enim Problemate continentur omnes omnino Quæſtiones, quæ inhoc genere, quo expreſſio quæpiam maxima minimave deſideratur, unquam proponi atque excogitari poſſunt: ideoque per iſtam Propoſitionem penitus exhauſta eſt methodus maximorum ac minimorum abſoluta, quam primo pertractandam ſuſcepimus. Præterea hîc notandum eſt, ſi expreſſio W non tantum formulas integrales, uti poſui-

mus, complectatur; verum etiam functiones determinatas ipsarum x, y, p, q, &c. tum solutionem nihilo difficiliorem reddi. Nam pari modo, loco harum functionum determinatarum, quantitates constantes poni debent, in quas scilicet abeunt posito $x = a$; at postmodum, in differentiatione ipsius W, has quantitates etiam tanquam constantes tractari oportet; eo quod functiones determinatæ nullos valores differentiales recipiunt. Quo autem clarius appareat, quomodo istiusmodi expressiones tractari conveniat; in sequentibus Exemplis nonnulla occurrent, quæ hoc argumentum penitus illustrabunt.

EXEMPLUM I.

38. *Invenire curvam coordinatis orthogonalibus contentam, in qua sit maximum vel minimum ista expressio* $(1+pp)^{\frac{1}{2}} \int y dx + y \int dx \sqrt{(1+pp)}$; *si ponatur abscissa* $x = a$.

Ponamus æquationem inter x & y quæsito satisfacientem jam esse inventam, atque posito $x = a$ fieri $y = f$ & $\sqrt{(1+pp)} = g$: itemque $\int y dx = A$, & $\int dx \sqrt{(1+pp)} = B$; erit $dA = n.dx$, & $dB = -n.d\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Expressio igitur, quæ maxima erit vel minima, hoc casu est $gA + fB$, cujus differentiale est $g\,dA + f\,dB$; quod positum $= 0$, dabit æquationem desideratam pro curva. Hic scilicet intelligitur litteras y & f, quæ ex functionibus determinatis sunt ortæ, in differentiatione tanquam quantitates constantes esse tractatas. Substitutis jam pro dA & dB valoribus debitis, divisioneque per n facta, oritur ista æquatio pro curva quæsita $g\,dx = f d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$.

Ponatur $\frac{f}{g} = c$, ita ut fit $\frac{y}{\sqrt{(1+pp)}} = c$, casu quo est $x = a$; erit integrando $x + b = \frac{cp}{\sqrt{(1+pp)}}$, atque $p =$

$\frac{x+b}{\sqrt{(cc-(x+b)^2)}} = \frac{dy}{dx}$; ex qua fit $y = b \pm \sqrt{(c^2 - (x+b)^2)}$. Curva igitur satisfaciens est Circulus, radio c descriptus, abscissis super recta quacunque assumptis, paritergue abscissarum initio ubicumque statuto. Quantitas autem c, quæ radium Circuli constituit, ex definita abscissa $x = a$ determinatur; quia esse debet $\frac{y}{\sqrt{(1+pp)}} = c$, casu quo $x = a$. Fit autem hoc casu $y = b \pm \sqrt{(c^2 - (a+b)^2)}$, & $\sqrt{(1+pp)} = \frac{c}{\sqrt{(cc-(a+b)^2)}}$: unde oritur $cc = b\sqrt{(cc-(a+b)^2)} \pm (cc - (a+b)^2)$, per quam, vel c per a, vel vicissim a per c determinari potest. Ponamus esse $b = 0$, $b = -c$, ita ut axis sit Circuli diameter, initiumque abscissarum in vertice constituatur; erit $y = \sqrt{(2cx - xx)}$, atque fiet $(a-c)^2 = 0$, seu $c = a$. Ex quo intelligitur, hoc casu quadrantem Circuli quæsito satisfacere. Sin autem initium abscissarum in loco diametri quocunque capiatur, fiet tantum $b = 0$, & si applicatæ positivæ sumantur fiet $(a+b)^2 = 0$, seu, $b = -a$. Diameter Circuli ergo manet indeterminatus: portioque Circuli hoc modo sumti quæstioni satisfaciet, quæ abscissæ a sua origine ad centrum Circuli usque productæ respondet.

EXEMPLUM II.

39. *Invenire æquationem inter* x & y, *ut pro valore definito* x = a, *hæc expressio* $y^{\int dx \sqrt{(1+pp)}} \int y dx$ *fiat maximum vel minimum.*

Posito $x = a$, fiat $y = f$, $\int dx \sqrt{(1+pp)} = A$, & $\int y dx = B$, erit $dA = -nv.d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ & $dB = nv.dx$.

Maximum ergo minimumve esse oportet hanc quantitatem $f^A B$, cujus differentiale est $f^A B dA lf + f^A dB$; quod positum $= 0$ dabit $B dA lf = -dB$. Pro æquatione quæsita igitur habetur:

betur $Blfd. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = dx$, & integrando $x+b = \frac{Bplf}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{cp}{\sqrt{(1+pp)}}$, posito $Blf = c$. Habetur ergo $p = \frac{b+x}{\sqrt{(cc-(b+x)^2)}}$ & $y = b \pm \sqrt{(c^2-(b+x)^2)}$. Erit igitur $f = b \pm \sqrt{(c^2-(b+a)^2)}$, posito $x = a$, atque $B = \int y\,dx = ba \pm \int dx \sqrt{(c^2-(b+x)^2)}$, posito post integrationem $x = a$. Facto igitur $Blf = c$, innotescet valor a, cui si x æqualis capiatur in Circulo radii c, portio abscindetur Problemati satisfaciens. Cæterum ex his & Coroll. 5 colligere licet, quoties formula maximi minimive fuerit functio quæcunque binarum harum formularum $\int y\,dx$ & $\int dx \sqrt{(1+pp)}$, curvam satisfacientem perpetuo esse Circulum: tantum ex solutione quantitas portionis satisfacientis debet diligenter investigari ac determinari.

EXEMPLUM III.

40. *Invenire æquationem inter* x *&* y, *ut, posito* $x = z$, *maximum minimumve fiat ista expressio* $e^{-n\int dx \sqrt{(1+pp)}} \int e^{n\int dx \sqrt{(1+pp)}}\,dx$.

Ponamus, casu proposito quo $x = a$, fieri $n\int dx \sqrt{(1+pp)} = A$, atque $\int e^{n\int dx \sqrt{(1+pp)}}\,dx = B$; ita ut maximum minimumve sit hæc quantitas $e^{-A} B$, cujus differentiale est $e^{-A}\,dB - e^{-A} B\,dA$; quod positum $= 0$ dabit æquationem hanc $dB = B\,dA$. At est dA valor differentialis formulæ $n\int dx \sqrt{(1+pp)}$, unde erit $dA = -n\,v.\,d.\,\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$: atque dB est valor differentialis formulæ $\int e^{n\int dx \sqrt{(1+pp)}}\,dx$, quæ continetur in Casu secundo §. 7, ubi est $Z = e^{n\int dx \sqrt{(1+pp)}}$ & $\Pi = \int dx \sqrt{(1+pp)}$, ita ut sit $Z = e^{n\Pi}$, & $dZ = e^{n\Pi} n\,d\Pi$, unde erit $L = e^{n\Pi} n$, & reliquæ litteræ M, N, P,

P, &c. fient $=$ o. Porro, ob $\Pi = \int dx \sqrt{(1+pp)}$, erit $[Z] = \sqrt{(1+pp)}$, & $d[Z] = \frac{p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$, ex quo erit $[M] = 0$, $[N] = 0$, & $[P] = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Jam eſt $\int L\,dx = n \int e^{n\int dx \sqrt{(1+pp)}}\,dx$, cujus valor, poſito $x = a$, erit $= nB$; hincque $V = n\,(B - \int e^{n\int dx \sqrt{(1+pp)}}\,dx)$. Per Regulam ergo datam fiet $dB = \Pi\nu.\,dx\,(-\frac{d.[P]\,V}{dx})$ $= -\Pi\nu.\,d.\frac{np\,(B-\int e^{n\int dx\sqrt{(1+pp)}}\,dx)}{\sqrt{(1+pp)}} = -\Pi\nu.\,d.\frac{nBp}{\sqrt{(1+pp)}}$, ob $dB = B\,dA$. Integrando itaque erit $\frac{np\,(B-\int e^{n\int dx\sqrt{(1+pp)}}\,dx)}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{nBp}{\sqrt{(1+pp)}} - nb$; hincque $\frac{b\sqrt{(1+pp)}}{p} = \int e^{n\int dx\sqrt{(1+pp)}}\,dx$. Ex qua æquatione, quia valor determinatus a exceſſit, perſpicuum eſt æquationem inventam pro quovis ipſius x valore æque valere. Ut autem hanc æquationem evolvamus, erit, differentialibus ſumtis, $\frac{-b\,dp}{p^2\sqrt{(1+pp)}} = e^{n\int dx\sqrt{(1+pp)}}\,dx$: quæ, per $\sqrt{(1+pp)}$ multiplicata atque integrata, dat $\frac{nb}{p} + c = e^{n\int dx\sqrt{(1+pp)}}$, qui exponentialis quantitatis valor in illa æquatione ſubſtitutus, dabit $\frac{nb\,dx}{p} + c\,dx = -\frac{b\,dp}{p^2\sqrt{(1+pp)}}$, ſeu $dx = \frac{-b\,dp}{p(nb+cp)\sqrt{(1+pp)}}$. Commodior autem æquatio oritur, ſi ponatur $\int dx\sqrt{(1+pp)} = s$, eritque s arcus curvæ, ſi fuerint x & y coordinatæ normales. Quare habebitur iſta æquatio $nb + cp = e^{ns}p$, quæ per dx multiplicata, ob $dy = p\,dx$, abit in hanc $nb\,dx + c\,dy = e^{ns}\,dy$.

Cum-

Cum autem, posito, $x = 0$, arcus s evanescere debeat, necesse est ut sit hoc casu $\frac{nb}{p} + c = 0$; hinc itaque vel dato curvæ initio constans c determinabitur, vel viciſſim ex c positio primæ tangentis innotescet. Cæterum si hanc quæstionem attentius contemplemur, deprehendemus eam jam contineri in Exemplo quodam Capitis præced. §. 45. Cum enim nostra expressio, quæ maximum minimumve esse debeat, sit $e^{-n\int dx\sqrt{(1+pp)}} \int e^{n\int dx\sqrt{(1+pp)}}\, dx$; ponatur ea $= W$, erit $e^{n\int dx\sqrt{(1+pp)}} W = \int e^{n\int dx\sqrt{(1+pp)}}\, dx$, atque differentiando fiet $dW + nW\,dx\sqrt{(1+pp)} = dx$. Maximi igitur minimive expressio W datur per æquationem differentialem, quæ in Casu quarto §. 7 continetur: atque methodo convenienti tractata ad eandem perducit æquationem, quam hîc invenimus. Quæstionem autem illam in se complectentem supra in Cap. præc. §. 45 tractavimus, in quo hunc ipsum casum adjunctum spectare licet. Comparatione autem instituta, summus perspicietur consensus solutionum variarum ejusdem Problematis, quæ quidem tentari queant.

EXEMPLUM IV.

41. *Invenire curvam in qua, pro data abciſſa* $= a$, *ſiat iſta expreſſio* $\frac{\int dx \sin. A. y. \sqrt{(1+pp)}}{\int dx \cos. A y. \sqrt{(1+pp)}}$ *maximum vel minimum.*

Posito $x = a$, fiat $\int dx\,(1+pp)^{-1:2} \sin. A\, y = A$, & $\int dx\,(1+pp)^{-\frac{1}{2}} \cos. A\, y = B$; erit, per valores differentiales,

$dA = n\nu.\, dx\,((1+pp)^{-1:2} \cos. Ay - \frac{1}{dx}\, d.\, \frac{p \sin. A. y}{\sqrt{(1+pp)}})$, &

$dB = n\nu.\, dx\,(-(1+pp)^{-1:2} \sin. Ay - \frac{1}{dx}\, d.\, \frac{p \cos. A y}{\sqrt{(1+pp)}})$.

Cum igitur $\frac{A}{B}$ debeat esse maximum vel minimum, erit $B\,dA$

$=$

$= A\,dB$; posito ergo $\frac{A}{B} = m$, fiet $(1+pp)^{1:2}\,dx$ cos. Ay $- d.\frac{p \sin. Ay}{\sqrt{(1+pp)}} = -m(1+pp)^{\frac{1}{2}}\,dx \sin. Ay - m d.\frac{p \cos. Ay}{\sqrt{(1+pp)}}$. Multiplicetur per p, erit [ob $d.(1+pp)^{1:2} \sin. Ay = dy(1+pp)^{1:2} \cos. Ay + \frac{p\,dp \sin. Ay}{\sqrt{(1+pp)}}$, & $d.(1+pp)^{1:2} \cos. Ay = -dy(1+pp)^{1:2} \sin A.y + \frac{p\,dp \cos. Ay}{\sqrt{(1+pp)}}$] $d.(1+pp)^{1:2} \sin. Ay - d.\frac{pp \sin. Ay}{\sqrt{(1+pp)}} = m d.(1+pp)^{1:2} \cos. Ay - m d.\frac{pp \cos. Ay}{\sqrt{(1+pp)}}$; quæ integrata & reducta præbet $\frac{\sin. Ay}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{m \cos. Ay}{\sqrt{(1+pp)}} + b$, sive $b\sqrt{(1+pp)} = \sin. Ay - m \cos. Ay$; ubi notandum est fieri debere, si $x = a$ ponatur, $m = \frac{\int dx(1+pp)^{1:2} \sin. Ay}{\int dx(1+pp)^{1:2} \cos. Ay}$. Sit $m = \frac{\sin. An}{\cos. An} = \text{tang. } An$; fiet $b\sqrt{(1+pp)} = \frac{\sin A(y-n)}{\cos. An}$, atque $y = n + A \sin. b(1+pp)^{1:2} \cos. An$. Quia vero est $dy = pdx$, erit $dx = \frac{dy}{p}$. At est $dy = \frac{cp\,dp}{\sqrt{(1+pp)(1-cc-ccpp)}}$, posito $b \cos. An = c$. Ex quibus conficitur $x = \int \frac{c\,dp}{\sqrt{(1+pp)(1-cc-ccpp)}}$, atque $y = \int \frac{cp\,dp}{\sqrt{(1+pp)(1-cc-ccpp)}}$; longitudo autem curvæ erit $= \int \frac{c\,dp}{\sqrt{(1-cc-ccpp)}} = A \sin. \frac{cp}{\sqrt{(1-cc)}}$. Quare si arcus curvæ dicatur s; habebitur ista concinna æquatio $dx \sin. As = \frac{c\,dy}{\sqrt{(1-cc)}}$: Constructio vero ex anterioribus formulis sponte consequitur.

SCHOLION II.

42. His igitur Capitibus penitus absolvimus eam Methodi maximorum ac minimorum ad lineas curvas inveniendas accommodatæ partem, quam absolutam vocavimus: in qua semper linea curva requiri solet, quæ habeat, pro dato quodam abscissæ seu alterius variabilis x valore, expressionem quamcunque indeterminatam, maximum minimumve. Nam ista expressio, quæ maximum minimumve esse debet, vel erit una quædam formula integralis formæ $\int Z dx$, ita ut Z sit functio quæcunque ipsarum x, y, p, q, &c. sive definita sive indefinita; pro quibus casibus Methodum tradidimus in Capitibus præcedentibus: Vel maximi minimive expressio illa continebit in se plures ejusmodi formulas integrales, ita ut sit duarum pluriumve formularum integralium functio quæcunque; pro hocque casu Methodus idonea in isto Capite est exposita, atque Exemplis illustrata. Universa autem Methodus, quam hic dedimus, nititur inventione valorum differentialium, qui singulis formulis integralibus quæ vel ipsæ maximum minimumve esse debeant, vel in maximi minimive expressione contineantur, atque ideo tota solvendi Methodus reducitur ad Casus illos, quos §. 7 hujus Capitis conjunctim repræsentavimus. Qui igitur illos casus in memoria tenet, vel in promtu habet, is ad omnia hujus generis Problemata expedite resolvenda erit paratus. Neque vero solum Casus ibi enumerati Methodum maximorum ac minimorum absolutam constituunt; verum etiam Methodum alteram relativam, quam in sequentibus aggrediemur, absolvent; ex quo illorum Casuum summus usus in utraque Methodo abunde perspicietur. Hanc autem tractationem duobus Capitibus absolvemus, in quorum priori omnibus curvis, ex quibus quæsita debet erui, unam quandam proprietatem communem, in posteriori vero plures tribuemus.

CAPUT V.

Methodus, inter omnes curvas eadem proprietate præditas, inveniendi eam, qua maximi minimive proprietate gaudeat.

DEFINITIO.

1. PRoprietàs communis eſt Formula integralis, ſeu expreſſio indefinita, quæ in omnes curvas ex quibus quæſitam determinari oportet, æqualiter competit.

SCHOLION I.

2. Hactenus Methodum maximorum ac minimorum tradidimus abſolutam, in qua perpetuo, inter omnes omnino curvas eidem abſciſſæ reſpondentes, una requiri ſolebat, quæ maximi minimive cujuspiam proprietate gauderet. Nunc autem progredimur ad Methodum relativam, in qua unam lineam maximi minimive proprietate præditam determinare docebimus, non ex omnibus omnino lineis eidem abſciſſæ reſpondentibus, verum ex illis, innumerabilibus quidem, lineis curvis tantum, quibus una quædam proprietas propoſita pluresve ſint communes. Ac primo quidem, in hoc Capite, innumerabiles curvas eidem abſciſſæ reſpondentes contemplabimur, quæ unam quandam proprietatem habeant communem; ex hisque unam lineam inveſtigabimus, in qua expreſſio quæcunque indefinita maximum minimumve obtineat valorem. Hoc in genere inprimis celebre eſt *Problema Iſoperimetricum*, initio hujus ſæculi publice propoſitum, in quo, inter omnes curvas ejuſdem longitudinis quæ quidem eidem abſciſſæ reſpondeant, eam definiri oportebat, quæ contineret maximi minimive cujuspiam proprietatem. Poſtmodum autem hæc Quæſtio in latiori ſenſu eſt accepta, ut iſta determina-

minatio non ſolum inter omnes curvas ejuſdem longitudinis fieret, verum etiam inter omnes curvas alia quacunque proprietate communi præditas; quam ipſam quæſtionem in hoc Capite pertractare ſuſcepimus. Cum igitur curva ſit eligenda, non ex omnibus omnino curvis eidem abſciſſæ reſpondentibus, verum ex iis, innumerabilibus duntaxat, in quas proprietas quæpiam propoſita æqualiter competat; hanc ipſam proprietatem ante omnia conſiderari oportet, quam hic nomine proprietatis communis indicamus. Hæc igitur proprietas communis, veluti æqualitas longitudinis curvarum, omnia puncta media afficere debet, & hanc ob rem erit functio indefinita, quæ, non ex unici curvæ elementi, verum ex totius curvæ poſitione determinetur. Quam ob rem iſtiuſmodi proprietas communis erit, vel formula integralis indefinita ſimplex, vel expreſſio plures ejuſmodi formulas integrales complectens. Omnino igitur pari modo erit comparata, quo ipſa maximi minimive formula, ſeu expreſſio. Eædem igitur varietates atque diviſiones, quas ante circa maximi minimive expreſſionem fecimus & tractavimus, æque ad proprietatem communem pertinebunt.

COROLL. I.

3. Si igitur proprietas communis fuerit propoſita, quæ ſit B, tum omnes curvæ ſunt conſiderandæ, quæ pro eadem data abſciſſa eundem valorem ipſius B continent; atque ex his ea debet definiri, quæ habeat maximum vel minimum.

COROLL. II.

4. In Problematis ergo huc pertinentibus duas res datas eſſe oportet, proprietatem communem B, ac maximi minimive expreſſionem A. Quibus datis, inter omnes curvas pro data abſciſſa eundem valorem B continentes, ea definiri debebit, quæ pro eadem abſciſſa valorem ipſius A habeat maximum vel minimum.

COROLL. III.

5. Dantur autem non ſolum infinitæ curvæ, quæ pro data abſciſſa eandem proprietatem communem habeant, ſed etiam dantur infinitis modis. Aſſumta enim curva quacunque pro lubitu, ea determinatum habebit valorem proprietatis communis propoſitæ; præter eam autem dabuntur innumerabiles aliæ eundem valorem proprietatis communis pro eadem abſciſſa continentes.

COROLL. IV.

6. Propoſita igitur expreſſione quacunque indefinita, innumerabilia infinitarum curvarum dabuntur genera; quorum quodlibet genus infinitas in ſe complectitur curvas, quæ pro eadem data abſciſſa eundem illius expreſſionis valorem contineant.

COROLL. V.

7. Cum igitur infinita dentur genera, quorum ſingula innumerabiles lineas curvas comprehendunt, in quas propoſita pro proprietate communi expreſſio æqualiter competat; in uno quoque genere dabitur una curva, quæ, pro reliquis ejuſdem generis curvis, alteram expreſſionem in maximo minimove gradu contineat.

COROLL. VI.

8. Quoniam ergo, ex quolibet genere, una curva maximi minimive proprietate prædita invenitur; omnino ejuſmodi curvæ ſatisfacientes infinitæ invenientur, quarum quævis ita erit comparata, ut inter omnes alias eadem proprietate communi gaudentes, maximi minimive proprietate ſit prædita.

Digitized by Google

SCHOLION II.

9. Hæc omnia magis illuſtrabuntur, ſi proprietatem communem, de qua hactenus in genere ſumus locuti, definiamus. Sit igitur proprietas communis, formula longitudinem arcus curvæ exprimens, maximi minimive expreſſio autem ſit $\int Z dx$; ita ut, inter omnes curvas quæ habeant arcus eidem abſciſſæ reſpondentes inter ſe æquales, ea debeat determinari, in qua pro eadem abſciſſa fiat $\int Z dx$ maximum vel minimum. Manifeſtum autem eſt, non ſolum infinitas lineas curvas dari pro eadem abſciſſa longitudine æquales, verum hoc etiam infinitis modis fieri poſſe. Sit enim abſciſſa communis $= a$, ſumaturque quæcunque longitudo c major quam a, infinitæ exhiberi poterunt lineæ, tum rectæ tum curvæ, quarum ſingularum longitudo ſit $= c$; atque inter has definiri poterit una, in qua ſit $\int Z dx$ maximum vel minimum. Loco c autem infinitæ accipi poſſunt quantitates; eo quod alia non adeſt conditio, niſi ut ſit $c > a$; atque quilibet valor pro c aſſumtus dabit unam curvam maximi minimive proprietate præditam. Quamobrem, pro infinitis ipſius c valoribus, infinitæ reperientur lineæ curvæ quæſtioni ſatisfacientes. Neque tamen idcirco Quæſtio pro indeterminata eſt habenda: nam ſolutio ipſa, infinitas curvas ſatisfacientes præbens, ita eſt interpretanda, ut unaquæque harum curvarum inventarum inter omnes alias æque longas poſſideat valorem formulæ $\int Z dx$ in maximo minimove gradu. Perſpicuum autem eſt, quod hîc de æqualibus arcubus curvarum oſtendimus, idem de alia quacunque formula ſeu expreſſione indeterminata valere debere. Ita ſi, inter omnes curvas quæ, pro data abſciſſa $x = a$, valorem formulæ $\int Y dx$ eundem continent, ea requiratur in qua ſit $\int Z dx$ maximum vel minimum; tum infinitæ quidem reperientur lineæ ſatisfacientes: verum hæ inter ſe ita diſcrepabunt, ut quælibet, inter omnes alias poſſibiles lineas curvas ſecum valorem formulæ $\int Y dx$ communem habentes, continent formulæ $\int Z dx$ valorem maximum vel minimum.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO I. THEOREMA.

10. *Quæ curva, inter omnes omnino curvas eidem abſciſſæ reſpondentes, maximi minimive cujuſpiam propoſiti proprietate gaudet; eadem curva ſimul, inter omnes curvas communi quacunque cum ipſa proprietate præditas, eadem maximi minimive proprietate gaudebit.*

DEMONSTRATIO.

Sit maximi minimive expreſſio $= A$, proprietas autem communis $= B$; eritque tam A quam B, vel formula integralis indefinita, vel expreſſio ex hujuſmodi pluribus formulis compoſita. Ponamus jam curvam eſſe inventam, quæ, inter omnes omnino curvas eidem abſciſſæ reſpondentes, expreſſionem A contineat maximam vel minimam; ea curva certum quemdam expreſſionis B continebit valorem; præter eam autem dabuntur innumerabiles aliæ, in quas idem expreſſionis B valor competet; hæque innumerabiles curvæ omnes jam continentur in illis omnibus omnino curvis, ex quibus ea, in qua expreſſio A eſt maximum minimumve, eſt inventa. Cum igitur hæc curva, inter omnes omnino curvas, propoſita maximi minimive proprietate gaudeat; eadem quoque, inter illas infinitas curvas ſecum expreſſionem B communem habentes, valorem expreſſionis A maximum minimumve poſſidebit. Q. E. D.

COROLL. I.

11. Methodus igitur abſoluta etiam Problematis Methodi relativæ reſolvendis inſervit: dum unam ſemper curvam ſatisfacientem exhibet. Verum tamen ſolutionem completam non largitur.

COROLL. II.

12. Curva ergo, quæ, inter omnes, expreſſionem A habet maxi-

maximam vel minimam, erit una ex infinitis illis curvis, quarum ſingulæ, inter omnes alias ſecum communi proprietate *B* gaudentes, eandem expreſſionem *A* maximam habent minimamve.

Coroll. III.

13. Solutio igitur Problematis, quo, inter omnes curvas eadem communi proprietate *B* prædictas, ea quæritur in qua ſit *A* maximum vel minimum, latius patebit, quam ſi abſolute, inter omnes curvas, ea quæreretur in qua eſt *A* maximum vel minimum; illaque ſolutio hanc tanquam caſum ſpecialem in ſe comprehendet.

Propositio II. Problema.

14. *Methodum reſolvendi Problemata, in quibus, inter omnes curvas communi quadam proprietate gaudentes, ea requiritur quæ maximi minimive cujuspiam propoſiti proprietate gaudeat, in genere adumbrare.*

Solutio.

Fig. 15. Omne maximum vel minimum ita eſt comparatum, ut, facta mutatione infinite parva, valor ejus omnino non immutetur. Quamobrem ſi curva az, inter omnes curvas eidem abſciſſæ AZ reſpondentes, quæ quidem communi proprietate *B* gaudeant, habeat valorem expreſſionis *A* maximum vel minimum; eundem valorem retinebit, ſi ipſi talis mutatio infinite parva inferatur, qua communis proprietas *B* non turbetur. Ad hoc autem non ſufficit, ut ante fecimus, unicam applicatam, puta Nn, particula infinite parva nν auxiſſe: quoniam enim hoc modo tota mutatio unica conditione determinatur, per eam effici nequit, ut tam proprietas communis *B* in ipſam curvam & immutatam æqualiter competat, quam maximi minimive expreſſio *A*. Quocirca mutationem adhibendam binis conditionibus

nibus determinatum esse oportet; id quod obtinebitur, si binæ applicatæ N n, & O o particulis infinite parvis nν & oω augeantur. Quod si ergo curva hoc modo immutari concipiatur; primum efficiendum est, ut proprietas communis cum in ipsam curvam tum in mutatam æque competat; deinde etiam maximi minimive expressio in utraque curva eundem valorem retinere debebit. Prius præstabitur, si expressionis, qua proprietas communis continetur, valor differentialis investigetur, oriundus ex translatione binorum n & o in ν & ω, isque evanescens ponatur: posteriori vero conditioni satisfiet, si pari modo valor differentialis expressionis, quæ maximum minimumve esse debet, quæratur, oriundus ex binis particulis nν & oω, atque nihilo æqualis ponatur. Hoc pacto, duæ obtinebuntur æquationes, altera ex proprietate communi, altera ex maximi minimive expressione; utraque autem ejusmodi habebit formam $S.\ n + T.\ o\omega = o$; in qua S & T erunt quantitates ad curvam pertinentes. Ex binis autem ejusmodi æquationibus eliminabuntur particulæ nν & oω; provenietque æquatio pro curva quæsita, quæ, inter omnes alias eadem communi proprietate *B* præditas, habeat valorem expressionis *A* maximum vel minimum. *Q. E. I.*

Coroll. I.

15. Solutio igitur hujusmodi Problematum quoque reducitur ad inventionem valorum differentialium: ipsi autem valores differentiales ab iis quos ante dedimus in hoc discrepant, quod ex translatione duorum curvæ punctorum definiri debeant.

Coroll. II.

16. Ejusmodi valores differentiales ergo ex duabus particulis nν & oω oriundos, in quovis Problemate, binos investigari oportet; alterum pro proprietate communi, alterum pro maximi minimive expressione.

Coroll. III.

17. Inventis autem in quovis Problemate his duobus valoribus differentialibus, uterque nihilo æqualis poni debet; ex quo binæ nascentur æquationes, quæ, eliminandis particulis assumtis $n\nu$ & $o\omega$, præbebunt unam æquationem naturam curvæ quæsitæ exprimentem.

Coroll. IV.

18. Si ergo, inter omnes curvas eidem abscissæ respondentes, quæ communi proprietate B æqualiter sunt præditæ, ea requiratur, in qua expressio A fiat maximum vel minimum; tum utriusque expressionis A & B valores differentiales, ex binis particulis $n\nu$ & $o\omega$ oriundi, quæri, & nihilo æquales poni debent; ex quibus duabus æquationibus si eliminentur particulæ $n\nu$ & $o\omega$, emerget æquatio pro curva quæsita.

Coroll. V.

19. In hac itaque operatione, ambæ expressiones A & B omnino pariter tractantur; neque in considerationem venit, utra vel proprietatem communem vel maximum minimumve denotet. Ex quo perspicuum est, eandem solutionem prodire debere, si expressiones A & B inter se commutentur.

Coroll. VI.

20. Eadem ergo solutio locum habebit, sive, inter omnes curvas communi proprietate B gaudentes, ea quæratur in qua fit A maximum vel minimum: sive vicissim, inter omnes curvas communi proprietate A gaudentes, ea quæratur in qua fit B maximum vel minimum.

SCHO-

SCHOLION.

21. Ambas expreſſiones *A* & *B*, licet in ſe ſpectatæ res omnino diverſas ſignificent, inter ſe commutabiles eſſe ipſa ſolutionis natura ſponte patet. Quod ſi enim ad binas particulas n ν & o ω reſpiciamus, quibus applicatæ N n & O o augentur; primum eas ita comparatas eſſe oportet, ut proprietas communis *B*, tam in ipſa curva quam in mutata, eundem valorem obtineat; ſcilicet proprietas communis *B* in curvam a m n o p z & in a m ν ω p z æque competere debet: deinde pari modo per eaſdem particulas n ν & o ω efficiendum eſt, ut expreſſio *A*, quæ maximum minimumve eſſe debet, tam pro curva a m n o p z quam pro a m ν ω p z eundem valorem recipiat. Atque adeo, tam proprietas communis, quam maximi minimive natura, eandem plane conditionem in calculum inducit; ex quo manifeſtum eſt ambas expreſſiones datas, quarum altera proprietatem communem, altera maximi minimive rationem continet, inter ſe commutari atque confundi poſſe, ſalva Solutione. Hanc ob rem ergo, in Solutione hujuſmodi Problematum, ſufficit noſſe ambas illas expreſſiones; neque ad Solutionem abſolvendam noſſe opus eſt, utra proprietatem communem aut maximum minimumve ſignificet. Sic ſi, inter omnes curvas longitudine æquales, quæratur ea, quæ maximam aream comprehendat; eadem reperitur curva quæ prodit, ſi, inter omnes curvas æquales areas includentes, ea quæratur quæ ſit breviſſima, vel minimam longitudinem habeat. Hæc ita ſe habent, ſi maximi minimive quod quæritur natura ita fuerit comparata, ut ejus valor differentialis ſit $= 0$. Jam ſupra autem animadvertimus, duplicis generis dari maxima & minima, in quorum altero valor differentialis ſit $= 0$, in altero vero $= \infty$. Hic vero tantum maxima ac minima prioris generis contemplamur; nam, in hac Methodo relativa, poſterius genus locum omnino habere nequit. Quod ſi enim valor differentialis, qui convenit maximi minimive expreſſioni, infinite magnus ponatur; tum ex hoc ſolo æquatio pro curva reperitur; neque ideo proprietas communis in computum ingreditur. Quare, ſi hujus

generis maximum vel minimum in Methodo abſoluta locum habet, eadem curva in Methodo relativa eadem proprietate gaudebit, quæcunque proprietas communis adjungatur. Cum igitur totum Solutionis hujuſmodi Problematum momentum verſetur in inventione valorum differentialium, qui ex binis particulis n ν & o ω oriuntur; Methodum trademus, ejuſmodi valores differentiales pro quacunque expreſſione indeterminata inveniendi, eo modo, quo ſupra uſi ſumus ad inveniendos valores differentiales ex unica particula n ν oriundos.

PROPOSITIO III. PROBLEMA.

Fig. 15. 22. *Propoſita quacunque expreſſione indeterminata, quæ ad datam abſciſſam* A Z *referatur; invenire ejus valorem differentialem, ortum ex translatione binorum curvæ punctorum* n *&* o *in* ν *&* ω.

SOLUTIO.

Ponamus abſciſſam $AI = x$, & applicatam $Ii = y$, erit $Kk = y'$, $Ll = y''$, $Mm = y'''$, $Nn = y'^{\text{IV}}$, $Oo = y^{\text{V}}$, $Pp = y^{\text{VI}}$ &c. Harum applicatarum duæ tantum, nempe y'^{IV} & y^{V} patiuntur alterationem a particulis n ν & o ω ipſis adjunctis. Erit igitur applicatæ y'^{IV} valor differentialis $= n\nu$, & applicatæ y^{V} valor differentialis $= o\omega$, reliquarum vero applicatarum omnium valor differentialis erit $= o$. Hinc reliquarum quantitatum ad curvam pertinentium p, q, r, s, &c. valores differentiales habebuntur, quatenus eæ ab his binis applicatis y'^{IV} & y^{V} pendent. Sic cum ſit $p = \frac{y' - y}{dx}$, erit valor differentialis ipſius $p = o$; ſimiliterque ipſius p', & p^0 : at cum ſit $p''' = \frac{y'^{\text{IV}} - y'''}{dx}$, erit ipſius p''' valor differentialis $= \frac{n\nu}{dx}$; &, ob $p'^{\text{IV}} = \frac{y^{\text{V}} - y'^{\text{IV}}}{dx}$, erit valor differentialis ipſius $p'^{\text{IV}} = \frac{o\omega}{dx} - \frac{n\nu}{dx}$; porroque ipſius p^{V} erit $= -\frac{o\omega}{dx}$. Deinde cum ſit

$q =$

$q = \frac{y' - p}{dx}$; erit valor differentialis ipſius $q'' = \frac{ny}{dx^2}$; ipſius $q''' = \frac{0\omega}{dx^2} - \frac{2ny}{dx^2}$, ipſius $q^{IV} = -\frac{20\omega}{dx^3} + \frac{ny}{dx^3}$; ipſius $q^{V} = \frac{0\omega}{dx^3}$. Hocque modo ſimiliter progredi licet ad ſequentes quantitates r, s, &c. cum ſuis derivativis; hincque naſcetur ſequens Tabella, qua ſingularum harum quantitatum valores differentiales exhibentur.

$d.\ y^{IV} = ny$	$d.\ q'' = \frac{ny}{dx^2}$
$d.\ y^{V} = 0\omega$	$d.\ q''' = -\frac{2ny}{dx^2} + \frac{0\omega}{dx^2}$
$d.\ p''' = \frac{ny}{dx}$	$d.\ q^{IV} = \frac{ny}{dx^3} - \frac{20\omega}{dx^3}$
$d.\ p^{IV} = -\frac{ny}{dx} + \frac{0\omega}{dx}$	$d.\ q^{V} = \frac{0\omega}{dx^3}$
$d.\ p^{V} = -\frac{0\omega}{dx}$	

$d.\ r' = +\frac{ny}{dx^2}$	$d.\ s = +\frac{ny}{dx^3}$
$d.\ r'' = -\frac{3ny}{dx^3} + \frac{0\omega}{dx^3}$	$d.\ s' = -\frac{4ny}{dx^4} + \frac{0\omega}{dx^4}$
$d.\ r''' = +\frac{3ny}{dx^3} - \frac{30\omega}{dx^3}$	$d.\ s'' = +\frac{6ny}{dx^4} - \frac{40\omega}{dx^4}$
$d.\ r^{IV} = -\frac{ny}{dx^3} + \frac{30\omega}{dx^3}$	$d.\ s''' = -\frac{4ny}{dx^4} + \frac{60\omega}{dx^4}$
$d.\ r^{V} = -\frac{0\omega}{dx^3}$	$d.\ s^{IV} = +\frac{ny}{dx^4} - \frac{40\omega}{dx^4}$
	$d.\ s^{V} = +\frac{0\omega}{dx^4}$

&c.

Ex hac Tabella perſpicitur, in valoribus differentialibus totidem terminos particula 0ω affectos occurrere, ac particula ny; atque in utriſque pares adeſſe coefficientes: diſcrimen vero in hoc conſiſtere, ut cuilibet termino particula 0ω affecto reſpon-

deat quantitas immediate ſequens eam, cui reſpondet ſimilis terminus particula $n\nu$ affectus. Sic dum terminus $-\frac{2\,n\,\nu}{d\,x^2}$ reperitur in valore differentiali quantitatis q''', ita terminus $-\frac{2\,o\,\omega}{dx^2}$ adeſt in valore differentiali quantitatis ſequentis q'^{v}. Deinceps, ob duplicis generis terminos in valoribus differentialibus occurrentes, quorum alteri particulam $n\nu$, alteri particulam $o\omega$ involvunt, valor differentialis cujuſcunque expreſſionis indeterminatæ hujuſmodi habebit formam $n\nu.\ I + o\omega.\ K$; de qua primum, manifeſtum eſt membrum prius $n\nu.\ I$ eſſe ejuſdem expreſſionis valorem differentialem, qui oritur ſi ſola particula $n\nu$ conſideretur; eritque ideo $n\nu.\ I$ ille ipſe valor differentialis, quem ſupra pro quavis expreſſione oblata definire docuimus; ita ut hoc membrum per præcepta ſupra tradita pro quavis expreſſione indeterminata exhibere liceat. Quod ad alterum membrum $o\omega.\ K$ attinet, quia ſinguli termini in quibus $o\omega$ ineſt perpetuo reſpondent quantitatibus ſequentibus eas, quibus reſpondent ſimiles termini particulam $n\nu$ involventes, palam eſt quantitatem K fore valorem, quem quantitas I in proximo ſequente loco induit, atque idcirco eſſe $K = I' = I + dI$. Quare cum membrum $n\nu.\ I$ ex præceptis jam ſupra datis aſſignare queamus, ex eo porro alterum membrum $o\omega.\ K = o\omega\,(I + dI)$ innoteſcet. Sit igitur V expreſſio quæcunque indeterminata, cujus valorem differentialem ex duabus particulis $n\nu$ & $o\omega$ oriundum definiri oporteat. Ponamus ejus valorem differentialem ex unica particula $n\nu$ oriundum eſſe $= n\nu.\ I$; eritque valor differentialis, qui ex ambabus particulis $n\nu$ & $o\omega$ oritur, $= n\nu.\ I + o\omega.\ I'$, ſeu $= n\nu.\ I + o\omega\,(I + dI)$; qui igitur ope regularum ſupra datarum facile aſſignari poterit. *Q. E. I.*

COROLL. I.

23. Omnium ergo expreſſionum, quarum valores differentiales ex unica particula $n\nu$ oriundos invenire docuimus, earundem valo-

valores differentiales ex binis particulis $n\nu$ & $o\omega$ oriundos nunc definire poſſumus.

COROLL. II.

24. Hæc igitur Methodus valebit tam ad expreſſionum valores differentiales inveniendos, qui non pendent a quantitate abſciſſæ propoſitæ AZ, quam qui ab iſtius abſciſſæ longitudine pendent.

COROLL. III.

25. Quin etiam ſi expreſſio propoſitâ, quæ vel proprietatem communem continet, vel maximum minimumve eſſe debet, fuerit functio duarum pluriumve formularum integralium; ejus valor differentialis ex binis particulis $n\nu$ & $o\omega$ oriundus eadem lege definietur.

SCHOLION.

26. In Capitibus ſuperioribus vidimus valorem differentialem cujuſcunque expreſſionis, qui ex unica particula $n\nu$ oritur, hujuſmodi habere formam $n\nu . dx . T$, ſeu $n\nu . T dx$; ubi T denotat quantitatem finitam: quare ejuſdem expreſſionis valor differentialis ex binis particulis $n\nu$ & $o\omega$ ortus erit $= n\nu . T dx + o\omega . T' dx$. quemadmodum in Solutione oſtendimus. Eadem autem forma facile ad hunc modum poteſt evinci: Scilicet ſi ponatur $o\omega = o$, tum prodire debet ipſe valor differentialis ex unica particula $n\nu$ ortus, quem ſupra invenire docuimus, eritque $n\nu . T' dx$. Sin autem ponatur $n\nu = o$, ac ſola particula $o\omega$ conſideratur, valor differentialis ſimili modo reperietur quo ſupra uſi ſumus: non autem erit $= o\omega . T dx$; nam quia particula $o\omega$ in ſitu ſequente accipitur, loco T ejus valor ſequens pariter ſumi debet; ita ut valor differentialis verus futurus ſit $= o\omega . T' dx$. Quod ſi ergo utraque particula $n\nu$ & $o\omega$ conjunctim conſideretur, erit valor differentialis $= n\nu . T dx + o\omega . T' dx$; eo quod in ipſo cal-

calculo particulæ $n\nu$ & $o\omega$ nuſquam inter ſe permiſcentur, ſed utraque perpetuo ſeorſim tractari poſſit. Ut autem hæc ad notandi modum in ſuperiori capite receptum accommodemus; ponamus V eſſe expreſſionem quamcunque indeterminatam, quæ, pro abſciſſa definita $AZ = a$, valorem recipiat $= A$; ejuſque valorem differentialem ex particula $n\nu$ ortum eſſe $= n\nu . dA$; ubi dA nobis denotet idem quod ante Tdx; poteritque iſte valor dA ex expreſſione V, modo in Capitibus præcedentibus expoſito, inveniri. Hoc invento erit ejuſdem expreſſionis V valor differentialis ex binis particulis $n\nu$ & $o\omega$ oriundus $= n\nu . dA + o\omega . dA'$ ubi dA' denotat valorem dA ſuo differentiali auctum. Quanquam autem iſta valorum differentialium ex binis particulis oriundorum ad noſtrum inſtitutum omnino eſt neceſſaria; tamen ſolutio ipſa Problematum huc pertinentium eo iterum reducetur, ut per ſolos valores differentiales modo ſupra expoſito inventos, qui ſcilicet ex unica particula $n\nu$ naſcuntur, abſolvi queat; id quod ex ſequente Propoſitione mox patebit.

PROPOSITIO IV. PROBLEMA.

27. *Inter omnes curvas ad eandem datam abſciſſam* $AZ = a$ *relatas, in quas idem valor expreſſionis indefinitæ* W *competit; determinare eam, in qua ſit expreſſio* V *maximum vel minimum.*

SOLUTIO.

Ponamus curvam az quæſito ſatisfacere, atque expreſſionem W in ea obtinere valorem determinatum $= B$; erit ergo hæc curva az inter omnes alias curvas ad eandem abſciſſam AZ relatas, in quibus expreſſio W eundem obtinet valorem, ita comparata, ut in ea expreſſio V maximum minimumve valorem recipiat, qui ſit $= A$. Ad curvam ergo hanc inveniendam, poſitis abſciſſa indefinita $AI = x$, & applicata reſpondente $Ii = y$; binæ applicatæ Nn & Oo particulis infinite parvis $n\nu$ & $o\omega$ augeri concipiantur: quo facto, tam ipſius W quam ipſius V valor

lor differentialis, qui ex his duabus particulis $n\nu$ & $o\omega$ adjunctis naſcetur nihilo æqualis poni debebit, uti in Propoſitione ſecunda oſtendimus. Sit jam expreſſionis V valor differentialis ex unica particula $n\nu$ ortus $= n\nu . dA$, atque expreſſionis alterius W valor differentialis ex eadem unica particula $n\nu$ ortus $= n\nu . dB$, quos valores differentiales ex præceptis in ſuperioribus Capitibus datis invenire licebit. Nunc igitur, dum binas particulas $n\nu$ & $o\omega$ contemplamur, erit expreſſionis V valor differentialis $= n\nu . dA + o\omega . dA'$; alterius vero expreſſionis W valor differentialis erit $= n\nu . dB + o\omega . dB'$. Quocirca, ad quæſitam curvam inveniendam, fieri oportet cum $n\nu . dA + o\omega . dA' = o$, tum etiam $n\nu . dB + o\omega . dB' = o$. Multiplicentur ambæ æquationes per quantitates quaſcunque, ita ut prodeat

$$\begin{aligned} n\nu . \alpha dA + o\omega . \alpha dA' &= o \\ n\nu . \mathfrak{C} dB + o\omega . \mathfrak{C} dB' &= o. \end{aligned}$$

Fiatque ad particulas $n\nu$ & $o\omega$ eliminandas tam $\alpha dA + \mathfrak{C} dB = o$, quam $\alpha dA + \mathfrak{C} dB' = o$; eruntque α & $\mathfrak{C}$ ejuſmodi quantitates, ſive conſtantes, ſive variabiles, quæ utrique æquationi ſatisfaciunt. Quoniam vero eſt $\alpha dA + \mathfrak{C} dB = o$, erit quoque $\alpha' dA' + \mathfrak{C}' dB' = o$; quæ æquatio, cum $\alpha dA + \mathfrak{C} dB' = o$ comparata, monſtrat eſſe debere $\alpha' = \alpha$, & $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}$; ex quo quantitates hæ α & $\mathfrak{C}$ debebunt eſſe conſtantes, & quidem quæcunque. Sumtis itaque pro α & $\mathfrak{C}$ quantitatibus quibuſcunque conſtantibus, æquatio pro curva erit $\alpha dA + \mathfrak{C} dB = o$. Hæc eadem æquatio prodit, ſi methodo conſueta particulas $n\nu$ & $o\omega$ eliminemus. Erit nempe $\frac{n\nu}{o\omega} = -\frac{dA'}{dA} = -\frac{dB'}{dB}$, ideoque $\frac{dA'}{dA} = \frac{dB'}{dB}$, ſeu $\frac{ddA}{dA} = \frac{ddB}{dB}$, ob $dA' = dA + ddA$, & $dB' = dB + ddB$. Æquatio autem $\frac{ddA}{dA} = \frac{ddB}{dB}$ integrata dat $l\,dA \pm l\,dB + lC$. Seu $dA = C\,dB$;

CdB; quæ, posito $C = -\frac{c}{\alpha}$, transit in $\alpha dA + c dB = 0$; quam ipsam ante invenimus. Quamobrem ad Problema resolvendum oportet, tam expressionis proprietatem communem continentis W, quam expressionis quæ maximum minimumve esse debet V, valores differentiales, methodo in superioribus Capitibus tradita, investigare, eosque per quantitates constantes quascunque multiplicare, summamque $= 0$ ponere; quo facto, resultabit æquatio naturam curvæ quæsitæ exprimens. *Q. E. I.*

Coroll. I.

28. Nunc igitur, ad Quæstiones in hac Propositione contentas resolvendas, sufficit nosse valores differentiales ex unica particula n, oriundos; quos supra jam expedite invenire docuimus.

Coroll. II.

29. Quare ad hoc negotium in subsidium vocari debebit Caput præcedens IV, ex eoque cum §. 7 tum §. 31. In loco priore enim continentur præcepta valores differentiales inveniendi, si expressiones indeterminatæ propositæ fuerint formulæ integrales singularis, in altero vero, si sint functiones duarum pluriumve ejusmodi formularum integralium.

Coroll. III.

30. Proposita ergo proprietate communi W, & maximi minimive expressione V, utriusque expressionis valorem differentialem ex his præceptis quæri oportet: quibus inventis, & per constantes arbitrarias multiplicatis, eorum aggregatum nihilo æquale positum dabit æquationem pro curva quæsita.

Coroll. IV.

31. Si, inter omnes omnino curvas eidem abscissæ AZ respon-

Digitized by Google

pondentes, quæratur ea, in qua expreſſio V maximum minimumve obtineat valorem; pro ea habetur iſta æquatio $dA = 0$; denotante dA valorem differentialem expreſſionis V.

Coroll. V.

32. Quod ſi autem, inter omnes curvas eidem abſciſſæ AZ reſpondentes, in quas expreſſio W æqualiter competat, quæratur ea in qua expreſſio V maximum minimumve habeat valorem; invenitur pro ea iſta æquatio $\alpha dA + \mathfrak{G} dB = 0$.

Coroll. VI.

33. Perſpicuum ergo eſt, curvam, quæ, inter omnes omnino curvas, habeat V maximum vel minimum, cujus æquatio eſt $dA = 0$, contineri in æquatione $\alpha dA + \mathfrak{G} dB = 0$, qua exprimitur curva, quæ, inter omnes eadem communi proprietate W gaudentes, habeat V maximum vel minimum.

Coroll. VII.

34. In ipſa igitur prima æquatione, quam Solutio præbet; $\alpha dA + \mathfrak{G} dB = 0$; jam ineſt una conſtans arbitraria; quæ autem per id determinari debet, ut valor expreſſionis W datum obtineat valorem.

Coroll. VIII.

35. Problema itaque ſic ſolvi poterit, ut, inter omnes curvas eidem abſciſſæ AZ reſpondentes, in quibus expreſſio W eundem datum obtineat valorem, definiatur ea in qua ſit valor ipſius V maximus vel minimus.

Coroll. IX.

36. Ex his denique intelligitur, Solutionem Problematis propoſiti,

positi, convenire cum Solutione hujus Problematis, quo, inter omnes omnino curvas eidem abscissæ AZ respondentes, requiratur ea quæ habeat $\alpha V + \zeta W$ maximum vel minimum. Quæ quæstio, etsi ad Methodum absolutam pertineat, tamen dat æquationem $\alpha dA + \zeta dB = 0$, quam ipsam invenimus.

SCHOLION I.

37. Ex his igitur non solum Methodus facilis atque expedita colligitur, omnes Quæstiones huc pertinentes resolvendi; verum etiam natura hujus generis Problematum penitius cognoscitur. Primo enim apparet, quod jam supra demonstravimus, Solutionem eandem fore, sive, inter omnes curvas communi proprietate W præditas, quæratur ea quæ habeat V maximum vel minimum; sive inverse, inter omnes curvas communi proprietate V præditas, ea requiratur in qua sit W maximum vel minimum. Deinde etiam intelligitur, Quæstionem ita proponi posse, ut ejus Solutio ad Methodum maximorum ac minimorum absolutam pertineat; congruit enim Problema propositum cum hoc, quo, inter omnes omnino curvas ad eandem abscissam AZ relatas, requiritur ea in qua sit ista expressio $\alpha V + \zeta W$ maximum vel minimum; atque hæc Problematis transformatio in causa est, quod Solutio per valores differentiales ex unica particula n oriundos perfici queat, neque amplius opus sit duas hujusmodi particulas considerare, prouti primo intuitu natura Quæstionis postulare videbatur. Hanc autem convenientiam postmodum, per se, ac sine ista Methodo qua binæ particulæ considerantur, demonstrabimus; quo veritas hæc, summi in isto negotio momenti, magis confirmetur. Ad solvendas cæterum hujusmodi Quæstiones, ante oculos habere oportet præcepta Capite præcedente in compendium redacta; quorum ope valores differentiales quarumcunque expressionum inveniri poterunt. Primo enim, §. 7 illius Capitis recensentur Casus, quibus formularum integralium solitariarum valores exhibentur: tum vero §. 31 traditur Methodus inveniendi valores differentiales expressio-

preſſionum, quæ ex duabus pluribuſve formulis integralibus utcunque ſint compoſitæ. Ex his itaque ſubſidiis, pro quavis Quæſtione oblata, tam maximi minimive expreſſionis quam proprietatis communis valor differentialis aſſignari poterit: utroquê autem invento, æquatio pro Curva quæſita nullo negotio formabitur; cum tantum opus ſit aggregatum quorumcunque multiplorum illorum binorum valorum differentialium nihilo æquale poni. Hæcque æquatio inventa, deinceps pari modo erit tractanda, quo ſupra, cum in reductione ad conſtruendum, tum in integratione uſi ſumus.

SCHOLION II.

38. Jam obſervavimus in æquatione $\alpha\, dA + \mathfrak{C}\, dB = \sigma$, quam Solutio immediate ſuppeditat, unam ineſſe quantitatem conſtantem; quæ autem non omnino ſit arbitraria, ſed ex conditione propoſita debeat determinari. Scilicet, cum in omnes curvas ex quibus quæſitam definiri oportet, eadem expreſſio W æqualiter competere debeat, ſeu in omnibus eundem valorem, puta B, obtinere; hæc quantitas B tanquam data ſpectari poteſt; atque cum ipſa in calculum non ingrediatur, ita conſtantes α & $\mathfrak{C}$ definire licebit, ut valor expreſſionis W, abſciſſæ $AZ = \alpha$ reſpondens, ipſi B æqualis fiat; hocque pacto, Quæſtio alioquin indeterminata determinabitur. Eatenus autem tantum determinabitur, quatenus, per integrationes poſt inſtituendas, novæ conſtantes arbitrariæ etiam per totidem puncta definiuntur. Prorſus nimirum ut ante, totidem puncta præſcribi poterunt, per quæ curva quæſita tranſeat, quot novæ conſtantes per integrationes ingredi cenſendæ ſunt. Horum autem numerus innoteſcet ex gradu differentialium ſummo, qui in æquatione inerit. Quoniam vero tota Quæſtio ad Methodum abſolutam revocari poteſt, numerus iſtiuſmodi conſtantium perpetuo erit par; ſeu æquatio reſultans $\alpha\, dA + \mathfrak{C}\, dB = 0$, erit vel finita, vel differentialis ſecundi gradus, vel differentialis quarti gradus, vel differentialis ſexti gradus, vel octavi, vel ita porro. Quod

Digitized by Google

ſi æquatio prodit finita, tum quoque curva penitus jam erit determinata; ſiquidem ratio inter α & 6 ita definiatur, ut expreſſio *W* datum recipiat valorem *B* in curva inventa, quam determinationem perpetuo adhiberi ponimus. Si æquatio inveniatur differentialis ſecundi gradus, tum duobus punctis curva inventa determinabitur; congruum autem ac more receptum eſt ipſos curvæ terminos a & z præſcribi, hiſque caſibus Problema determinabitur, ſi conditio iſta adjungatur, ut curva quæſita intra datos terminos a & z contineatur. Sin autem æquatio prodeat differentialis quarti gradus, tum quatuor punctis pro lubitu aſſignatis, curva ſatisfaciens determinabitur; hæc igitur definiri ita conveniet, ut, præter terminos extremos a & z, ſimul poſitio tangentium in his terminis præſcribatur. Sin perveniatur ad æquationem differentialem ſexti gradus, tum curva per ſex quæcunque puncta determinabitur: eorum autem loco præſcribi poterunt primo ambo termini a & z, tum poſitio tangentium in his terminis, ac tertio curvedo in his ipſis locis ſeu radii oſculi quantitas. His igitur notatis, intelligetur ex ipſa Solutione cujuſmodi conditio ad Problematis cujuſque propoſitionem adjungi debeat, ut id fiat penitus determinatum: hæcque admonitio, non ſolum hîc, ſed etiam in Methodo abſoluta atque reliqua Methodo relativa, locum habet.

SCHOLION III.

39. Diſcrimen hîc etiam maximi momenti inprimis eſt notandum, ex quo in Methodo abſoluta primariam tractationis partitionem deſumſimus. Conſiſtit id autem in modo, quo curva inventa Quæſtioni ſatisfacit. Fieri enim poteſt, ut ejuſquæcunque portio ad abſciſſam indefinitam relata requiſita proprietate gaudeat; deinde etiam dantur caſus, quibus nonniſi ea portio quæ definitæ abſciſſæ $AZ = a$ reſpondet, conditioni Problematis ſatisfaciat. Illud ſcilicet evenit, ſi quantitas hæc *a* in æquationem, quam Solutio ſuppeditat, vel omnino non ingreditur, vel in quantitates arbitrarias α & 6 comprehendi queat.

queat. Ex quo manifeſtum eſt, ſi ambæ formulæ W & V in caſu primo §. 7 Capitis præcedentis recenſito contineantur, tum curvæ inventæ quamlibet portionem ad Quæſtionem eſſe acommodatam. Deinde vero etiam fieri poteſt, ut licet quantitas a, ſeu quantitates ab ea pendentes, vel in alterutro valore differentiali inſint, vel in utroque; tamen eæ vel ſe mutuo tollant in æquatione $\alpha dA + \mathfrak{C} dB = 0$, vel ſub arbitrariis α & $\mathfrak{C}$ comprehendi queant; quo caſu pariter quamvis curvæ inventæ portionem ſatisfacere oportet. Hoc autem tantum locum habet, ſi non datus ac determinatus præſcribatur valor, quem proprietas communis W in portione ſatisfaciente obtinere debeat: tum enim fieri nequit, ut in quavis portione eundem valorem ſortiatur. Ex Solutione autem unius cujuſque Quæſtionis facile intelligetur, qua conditione, ſive tota curva a z, ſive quævis portio, ſatisfacere queat; id quod commodiſſime in Exemplis oſtendi poterit.

EXEMPLUM I.

40. Inter omnes curvas ad abſciſſam AZ *relatas, in quibus formula* $\int y x dx$ *eundem obtinet valorem, invenire eam in qua ſit valor formulæ* $\int y y dx$ *minimus.*

Erit igitur proprietas communis $W = \int xy\,dx$, cujus, ob $dxy = y\,dx + x\,dy$, valor differentialis eſt $=$ n*v*. dx. x. Maximi autem minimive formula eſt $V = \int yy\,dx$, cujus, ob $d.\,yy = 2y\,dy$, valor differentialis eſt $=$ n*v*. dx. $2y$. Obtinebitur ergo, diviſione per n*v*. dx inſtituta, hæc æquatio $\alpha x + 2\mathfrak{C} y = 0$; ex qua patet Quæſtioni ſatisfacere lineam rectam in A cum axe AZ angulum quemcunque conſtituentem. Et quia longitudo abſciſſæ $AZ = a$ non in computum ingreditur, quævis hujus rectæ portio æque ſatisfaciet. Quod ſi autem poſtuletur, ut pro data abſciſſa $AZ = a$, formula $\int y x dx$ datum obtineat valorem, puta B; tum ob $y = mx$, fiet $\int y x dx = \frac{1}{3} mx^3$; ideoque $\frac{1}{3} ma^3 = B$; ex quo poſitio lineæ rectæ

ita

ita definietur, ut esse debeat $y = \frac{3Bx}{a^3}$. Hæc igitur recta jam ista proprietate gaudebit, ut ea inter omnes lineas, sive rectas, sive curvas, quæ pro data abscissa A Z $= a$ habeant formulæ $\int x y dx$ valorem $= B$, producat formulæ $\int y y dx$ minimum valorem.

EXEMPLUM II.

41. *Inter omnes curvas ejusdem longitudinis puncta* a *&* z *jungentes, invenire eam quæ maximam vel minimam aream* a A Z z *comprehendat.*

Quoniam proprietas communis est longitudo arcus $= \int dx \sqrt{(1+pp)}$; erit ejus valor differentialis $= -$ n $v.\ d.\ \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Deinde maximi minimive formula est $\int y dx$, cujus valor differentialis est n $v.\ dx$: unde pro curva quæsita ista habebitur æquatio $dx = b\,d.\ \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, & integrando $x + c = \frac{bp}{\sqrt{(1+pp)}}$; ideoque $p = \frac{x+c}{\sqrt{(b^2-(x+c)^2)}} = \frac{dy}{dx}$. Hinc ergo integrando fit $y = f \pm \sqrt{(b^2-(x+c)^2)}$, seu $b^2 = (y-f)^2 + (x+c)^2$; quæ est æquatio generalis pro Circulo. Quamobrem arcus Circuli quicunque per puncta a & z ductus, inter omnes alias lineas curvas ejusdem longitudinis, vel maximam vel minimam aream a A Z z includet. Duplici autem modo Circuli arcus datæ longitudinis intra terminos a & z constitui potest; altero, quo concavitatem axi A Z obvertit; altero, quo convexitatem. Priori casu manifestum est aream fore maximam, posteriore vero minimam. Atque hinc si dentur termini a & z, una cum longitudine curvæ intra hos terminos constitutæ, quam majorem quidem esse oportet lineam rectam hos terminos jungentem; Solutio penitus erit determinata: arcus Circuli enim hujus longitudinis per hos terminos poterit describi unicus,

unicus, qui, prout vel concavitatem vel convexitatem axi A Z obvertat, arcam formabit vel maximam vel minimam.

COROLLARIUM.

42. Hinc etiam patet arcum circularem a z, per terminos a & z ductum, non ſolum maximam aream a A Z z, inter omnes alias lineas ejuſdem longitudinis formare; ſed etiam quæcunque linea a C E D z a termino a ad terminum z ducta detur, cum ea arcus circularis a z maximam includet aream. Nam ſi area a A Z z eſt maxima, erit quoque area a A Z z — a A C — z Z D + C E D, ob areas a A C, z Z D & C E D conſtantis magnitudinis quæcunque linea pro a z capiatur, maxima. *Fig.* 16.

EXEMPLUM III.

43. *Inter omnes curvas ejuſdem longitudinis puncta* A *&* M *jungentes, invenire eam quæ, cum rectis* A C *&* M C *ad punctum fixum* C *ductis, maximam vel minimam comprehendat aream* A C M. *Fig.* 7.

Quoniam, ob data puncta A, C, M, rectæ A C & M C poſitione dantur, ponatur angulus A C M $= x$, ſeu deſcripto, centro C, radio C B $= 1$, arcu circulari B S, ſit hic arcus B S $= x$, & ponatur C M $= y$; erit S s $= dx$, M n $= y\,dx$, & area A C M $= \frac{1}{2}\int y y\,dx$. Porro ob m n $= dy$, erit M m $= \sqrt{(y^2\,dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{(yy + pp)}$, poſito $dy = p\,dx$. Quare inter omnes æquationes relationem ipſarum x & y continentes, quæ, pro dato ipſius x valore, eandem præbent quantitatem $\int dx\sqrt{(yy + pp)}$, eam definiri oportet, quæ, pro eodem ipſius x valore, præbeat formulæ $\frac{1}{2}\int y y\,dx$ quantitatem vel maximam vel minimam. Cum igitur formulæ $\int dx\sqrt{(yy + pp)}$ valor differentialis ſit $= n\nu.\,dx\left(\frac{y}{\sqrt{(yy+pp)}} - \frac{1}{dx}\,d.\frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}}\right)$ & formulæ $\int y y\,dx$ valor differentialis $=$

$n\nu.\ dx.\ y$; habebitur pro curva quæsita ista æquatio $y\,dx = \frac{b\,y\,dx}{\sqrt{(yy+pp)}} - b\,d.\ \frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}}$, quæ, per p multiplicata, abit in hanc $y\,dy = \frac{b\,y\,dy}{\sqrt{(yy+pp)}} - b\,p\,d.\ \frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}} = b\,d.\sqrt{(yy+pp)} - \frac{b\,p\,dp}{\sqrt{(yy+pp)}} - b\,p\,d.\ \frac{p}{\sqrt{(yy+pp)}}$; cujus integrale est $\frac{1}{2}yy = b\sqrt{(yy+pp)} - \frac{b\,pp}{\sqrt{(yy+pp)}} + bc = \frac{b\,yy}{\sqrt{(yy+pp)}} + bc$. Ducatur in tangentem MP ex C perpendiculum CP $= u$; erit $u = \frac{yy}{\sqrt{(yy+pp)}}$; habebiturque $yy = 2bu + bc$: quam æquationem supra jam ostendimus esse ad Circulum. Quamobrem arcus Circuli per terminos A & M ductus hanc habebit proprietatem, ut, inter omnes alias curvas ejusdem secum longitudinis terminos A & M jungentes, aream ACM exhibeat vel maximam vel minimam; prout ille arcus, vel concavitatem, vel convexitatem intra angulum ACM vertat. Quo ipso id confirmatur, quod §. præced. in genere adnotavimus.

EXEMPLUM IV.

Fig. 15. 44. *Inter omnes curvas puncta* A *&* Z *jungentes, quæ circa axem* AZ *rotatæ generant solida ejusdem superficiei; determinare eam quæ simul producat volumen solidi hoc modo generati maximum.*

Superficies solidi hoc modo generati, proportionalis invenitur formulæ integrali huic $\int y\,dx\sqrt{(1+pp)}$, cujus valor differentialis est $n\nu.\ dx\ (\sqrt{(1+pp)} - \frac{1}{dx}\,d.\ \frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}})$ Volumen vero solidi hoc modo generati est ut $\int y\,y\,dx$, cujus valor differentialis est $= n\nu.\ dx.\ 2y$. Quocirca resultabit ista æquatio $2y\,dx = b\,dx\sqrt{(1+pp)} - b\,d.\ \frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}}$.

Multi-

Multiplicetur hæc per p, ut prodeat $2ydy = bdy\sqrt{(1+pp)} - bp\,d.\frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}} = bd.y\sqrt{(1+pp)} - \frac{byppdp}{\sqrt{(1+pp)}} - bp\,d.\frac{yp}{\sqrt{(+pp)}}$, cujus integrale eſt $yy = by\sqrt{(1+pp)} - \frac{bypp}{\sqrt{(1+pp)}} - bc = \frac{by}{\sqrt{(1+pp)}} + bc$. Erit ergo $by = (yy - bc)\sqrt{(1+pp)}$, & $p = \frac{\sqrt{(b^2y^2-(yy-bc)^2}}{yy-bc}$) $= \frac{dy}{dx}$. Quare erit $dx = \frac{(yy-bc)dy}{\sqrt{(bbyy-(yy-bc)^2}}$. De hac æquatione primo notandum eſt, ſi fuerit $c = 0$ fore $dx = \frac{ydy}{\sqrt{(bb-yy)}}$; ideoque curvam eſſe Circulum, cujus centrum in axe A Z ſit poſitum; ille igitur arcus circularis, centro in axe A N ſumpto deſcriptus & per data duo puncta a & z tranſiens Quæſtioni ſatisfaciet; erit autem is unicus, ideoque ſolidum definitæ ſuperficiei generabit. Quare ſi, inter omnes curvas quæ ſolida alius atque diverſæ ſuperficici generant, quæratur ea quæ maximum volumen producat, ea non erit Circulus, ſed alia curva in æquatione $dx = \frac{(yy-bc)dy)}{\sqrt{(bbyy-(yy-bc)^2)}}$ contenta. Non ſolum enim, ob binas conſtantes b & c, effici poteſt, ut curva per præſcripta duo puncta a & z tranſeat; ſed etiam ut longitudo curvæ a z exiſtat datæ magnitudinis. Cæterum longitudo curvæ, ob $\int dx\sqrt{(1+pp)} = \int \frac{bydx}{yy-bc}$ fiet $= \int \frac{bydy}{\sqrt{(bbyy-(yy-bc)^2)}}$, cujus integrale a quadratura Circuli pendet, eſtque $= \frac{b}{2}$ A cof. $\frac{b(2c+b)-2yy}{b\sqrt{(bb+4bc)}} +$ *Conſt.* Quod ſi autem b ponatur $= \infty$, caſus oritur ſingularis; æquatio namque prodit hæc $dx = -\frac{c\,dy}{\sqrt{(yy-cc)}}$, quæ eſt pro curva Catenaria convexitatem axi A Z obvertente.

EXEMPLUM V.

45. *Inter omnes curvas* a z *æquales areas* a A Z z *continentes, determinare eam, quæ circa axem* A Z *rotata generet ſolidum minimæ ſuperficiei.*

Quoniam proprietas communis in area $= \int y\,dx$ conſtituitur; erit ejus valor differentialis $= n\nu.\,dx$. Deinde formula, quæ minimum eſſe debet, eſt $\int y\,dx\sqrt{(1+pp)}$, cujus valor differentialis eſt $= n\nu.\,(dx\sqrt{(1+pp)} - d.\,\frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}})$; unde orietur, pro curva quæſita, iſta æquatio $n\,dx = dx\sqrt{(1+pp)} - d.\,\frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}}$, quæ, per p multiplicata & integrata, præbet $ny + b = \frac{y}{\sqrt{(1+pp)}}$, ſeu $\sqrt{(1+pp)} = \frac{y}{ny+b}$; unde fit $p = \frac{\sqrt{(y^2-(ny+b)^2)}}{ny+b} = \frac{dy}{dx}$; ac $dx = \frac{(ny+b)\,dy}{\sqrt{((1-n^2)y^2-2bny-bb)}}$. Ex qua patet, ſi ſit $b = 0$, tum curvam eſſe abituram in lineam rectam puncta a & z jungentem. Deinde ſi ſit $n = 0$, ob $dx = \frac{b\,dy}{\sqrt{(yy-bb)}}$, curva erit Catenaria concavitatem axi A Z obvertens. Quod ſi autem ſit $n = -1$, fiet $dx = \frac{(b-y)\,dy}{\sqrt{(2by-bb)}}$; ex qua integrando oritur $x = c + \frac{2b-y}{3b}\sqrt{(2by-bb)}$; quæ eſt pro curva algebraïca, & in rationalibus præbet $9b(x-c)^2 = (2b-y)^2(2y-b)$. Eſt ideo linea tertii ordinis & pertinet ad ſpeciem 68 NEWTONI.

EXEMPLUM VI.

45. *Inter omnes curvas* a z *ejuſdem longitudinis; definire eam quæ circa axem* A Z *rotata producat maximum ſolidum.*

Inter

Digitized by Google

Inter omnes igitur curvas proprietate communi $\int dx \sqrt{(1+pp)}$ gaudentes, ea quæritur in qua ſit $\int yy dx$ maximum. Quoniam ergo formulæ $\int dx \sqrt{(1+pp)}$ valor differentialis eſt $= -ny.d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$; formulæ vero $\int yy dx$ valor differentialis eſt $= 2ny.ydx$; habebitur pro curva quæſita iſta æquatio $2ydx = \pm bbd.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, quæ, multiplicata per p & integrata, dabit $yy + bc = \pm\frac{bb}{\sqrt{(1+pp)}}$; ſeu $\sqrt{(1+pp)} = \frac{\pm bb}{yy+bc}$; hincque $p = \frac{\sqrt{(b^4-(yy+bc)^2)}}{yy+bc} = \frac{dy}{dx}$; ex qua fit $x = \int\frac{(yy+bc)dy}{\sqrt{(b^4-(yy+bc)^2)}}$. Hæc curva hanc habet proprietatem ut ejus radius oſculi, qui generaliter eſt $= dx : d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, fiat $= \frac{bb}{2y}$; hoc eſt, proportionalis eſt applicatæ y inverſæ; unde patet curvam quæſitam eſſe Elaſticam. Non ſolum autem per conſtantes b & c arbitrarias effici poteſt, ut curva per datos terminos a & z tranſeat, ſed etiam ut ejus arcus intra hos terminos interceptus fiat datæ magnitudinis. Si fit $c = 0$, prodit Elaſtica rectangula. Cæterum nullo caſu conſtructio per quadraturam vel Circuli vel Hyperbolæ abſolvi poteſt; niſi ſint vel b & c infinita, quo quidem caſu linea a z prodit recta, vel $b = c$. Hoc enim caſu, habebitur $x = \int\frac{(yy+bb)dy}{y\sqrt{-(2bb-yy)}}$, ſeu, ſumto bb negativo, erit $x = \int\frac{(yy-bb)dy}{y\sqrt{(2bb-yy)}} = \int -\sqrt{(2bb-yy)} - bb\int\frac{dy}{y\sqrt{(2bb-yy)}}$; & integratione per logarithmos abſoluta, fiet $x = \int -\sqrt{(2bb-yy)} + bl\frac{b+\sqrt{(2bb-yy)}}{y}$. Ipſa vero curvæ longitudo, quæ generaliter eſt $= \int\frac{bbdy}{\sqrt{(b^4-(yy+bc)^2)}}$, erit hoc caſu $= g - bl\frac{b+\sqrt{(2bb-yy)}}{y}$.

EXEMPLUM VII.

47. *Invenire curvam, qua, inter omnes alias ejuſdem longitudinis, circa axem* AZ *rotata, producat ſolidum cujus ſuperficies ſit vel maxima vel minima.*

Quoniam proprietas communis eſt $= \int dx \sqrt{(1+pp)}$; cujus valor differentialis eſt $= n\nu.\, d.\, \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$; maximi minimive formulæ autem $\int y\, dx \sqrt{(1+pp)}$ valor differentialis eſt $= n\nu.\, (dx \sqrt{(1+pp)} - d.\, \frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}})$; habebitur pro curva quæſita iſta æquatio $b\, d.\, \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = dx \sqrt{(1+pp)} - d.\, \frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}}$, quæ per p multiplicata & integrata præbet $c - \frac{b}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{y}{\sqrt{(1+pp)}}$, ſeu $c = \frac{b+y}{\sqrt{(1+pp)}}$. Hinc fiet $\sqrt{(1+pp)} = \frac{b+y}{c}$, & $p = \frac{\sqrt{((b+y)^2 - cc)}}{c} = \frac{dy}{dx}$: ex hacque $dx = \frac{c\, dy}{\sqrt{((b+y)^2 - cc)}}$, quæ eſt æquatio generalis pro Catenaria, & ſatisfacit, dummodo axis reſpectu catenæ ſuſpenſæ ſitum teneat horizontalem. Fieri igitur poteſt, ut curva vel convexitatem vel concavitatem axi AZ obvertat, priori caſu ſuperficies ſolidi fiet minima, poſteriori maxima.

EXEMPLUM VIII.

Fig. 17. 48. *Inter omnes curvas per puncta* A *&* C *tranſeuntes, quæ omnes æquales areas* ABC *comprehendant; definire eam quæ in fluido ſecundum directionem axis* BA *mota minimam patiatur reſiſtentiam.*

Poſitis abſciſſa AP $= x$, applicata PM $= y$, proprietas communis eſt $\int y\, dx$, ejuſque valor differentialis $= n\nu.\, dx$. Reſiſtentia autem totalis, quam figura in directione AB ſentit, eſt ut

ut $\int \frac{p^3\,dx}{1+pp}$, cujus valor differentialis $= nv.\,d.\,\frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2}$. Ex his emergit pro curva ista æquatio $dx = b\,d.\,\frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2}$; quæ integrata dat $x = c + \frac{bpp(3+pp)}{(1+pp)^2}$. Æquatio autem differentialis per p multiplicata, abit in hanc $dy = bpd.\,\frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2}$, quæ in hanc formam $dy = bpd\,\frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2} + b\,dp.\,\frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2} - b\,dp.\,\frac{3pp+p^4}{(1+pp)^4}$ transmutata, habet integrale $y = f + \frac{bp^3(3+pp)}{(1+pp)^2} - \frac{bp^3}{1+pp}$ seu $y = f + \frac{2bp^3}{(1+pp)^2}$; cum igitur sit $x = c + \frac{bpp(3+pp)}{(1+pp)^2}$, curva erit algebraïca. Efficiendum est autem, ut, quo casu fit $x = 0$ [quod fieri nequit, nisi vel b vel c capiatur negativum] simul y evanescat. Quo autem curva cognoscatur, ponatur $x - c = t$ & $y - f = u$, erit $t = \frac{bpp(3+pp)}{(1+pp)^2}$, & $u = \frac{2bp^3}{(1+pp)^2}$; unde fit $t + u\sqrt{3} = \frac{b(p^4+2p^3\sqrt{3}+3pp)}{(1+pp)^2}$. atque $t - u\sqrt{3} = \frac{b(p^4-2p^3\sqrt{3}+3pp)}{(1+pp)^2}$. Extrahendis igitur radicibus quadratis habebitur $\sqrt{\frac{t+u\sqrt{3}}{b}} = \frac{pp+p\sqrt{3}}{b}$, & $\sqrt{\frac{t-u\sqrt{3}}{b}} = \frac{pp-p\sqrt{3}}{1+pp}$; hincque $\sqrt{\frac{t+u\sqrt{3}}{b}} + \sqrt{\frac{t-u\sqrt{3}}{b}} = \frac{2pp}{1+pp}$, & $\sqrt{\frac{t+u\sqrt{3}}{b}} - \sqrt{\frac{t-u\sqrt{3}}{b}} = \frac{2p\sqrt{3}}{1+pp}$: At est $\frac{t}{b} = \frac{1}{2}.\,\frac{2pp}{1+pp} - \frac{1}{2}.\,\frac{4p^4}{(1+pp)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t+u\sqrt{3}}{b}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t-u\sqrt{3}}{b}} - \frac{1}{2}\left(\frac{2t}{b} + 2\sqrt{\frac{tt-3uu}{bb}}\right)$. Ergo $\frac{4t}{b} = 3\sqrt{\frac{t+u\sqrt{3}}{b}} + 3\sqrt{\frac{t-u\sqrt{3}}{b}} - \frac{2\sqrt{(tt-3uu)}}{b}$; quæ rationalis facta præbet æquationem hanc quarti ordinis

$4s^4 + 8ttuu + 4u^4 = 4bt^3 + 36btuu - 27b^2uu$, ſeu $4(tt+uu)^2 = 4bt^3 + 36btu^2 - 27b^2u^2$.

Ad curvam autem per infinita puncta conſtruendam, expedit adhibere has formulas, $s = \frac{b(p^4+3pp)}{(1+pp)^2}$ & $u = \frac{2bp^3}{(1+pp)^2}$. Primum autem patet curvam habere diametrum in poſitione abſciſſarum s ſitam, duobuſque locis fieri $u = 0$, nempe caſu $p = 0$, quo ſimul fit $s = 0$, & caſu $p = \infty$, quo fit $s = b$. Quod ſi ponatur $b = 4c$, atque $s = 3c + r$, orietur iſta æquatio $(rr+uu)^2 + 8c(r^3 - 3ruu) + 18cc(rr+uu) - 27c^4 = 0$ quæ cum ſit functio ipſarum $rr + uu$ & $r^3 - 3ruu$, declarat curvam hanc habere tres diametros ſeſe in initio abſciſſarum harum r decuſſantes. Curva ergo quæſita triangulo æquilatero ABC ita erit inſcriptibilis, ut conſtet ex tribus ramis ADB, AEC & BFC inter ſe ſimilibus & æqualibus, qui in punctis A, B, & C cuſpides forment acutiſſimos. Ejus igitur diametri erunt tres rectæ AI, BH & CG, ſeſe in centro trianguli O decuſſantibus. Erit autem $AO = 3c$, $OF = c$, & $OI = \frac{1}{2}c$, ita ut ſit $AI = \frac{9}{2}c$ & $FI = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}OF$. Hujus jam curvæ quæcunque portio abc rectis ab & bc parallelis ipſis AI & BI & arcu curvæ ac comprehenſa, ita erit comparata, ut arcus ac inter omnes alios puncta a & c jungentes, & æqualem aream abc continentes, in fluido ſecundum directionem ba mota minimam patiatur reſiſtentiam. Porro autem hæc curva erit rectificabilis, reperiturque arcus $ADB = \frac{16}{7}c$; ex quo erit $ADB : AI = \frac{16}{7} : \frac{9}{2} = 32 : 27$, atque $ADB : AB = 32 : 18\sqrt{3} = 16 : 9\sqrt{3}$.

EXEMPLUM IX.

Fig. 19. 49. *Inter omnes curvas* AM *æquales areas* APM *includentes; invenire eam, quæ ſit ita comparata, ut, ſi perpetuo a centro circuli oſculantis* O *ad applicatam* MP *productam ducatur perpendicularis* ON; *curva a punctis* N *formata minimam comprehendat aream,* APN.

Poſitis abſciſſa $AP = x$, & applicata $PM = y$; erit area APM

$APM = \int y\,dx$, quæ eſt proprietas communis, ejuſque valor differentialis $= n\nu.\,dx$. Deinde, cum ſit radius oſculi $MO = -\frac{(1+pp)^{3:2}}{q}$, fiet $MN = -\frac{(1+pp)}{q}$ & $PN = -\frac{(1+pp)}{q} - y$; ex quo area APN erit $= -\int y\,dx - \int \frac{(1+pp)}{q}\,dx$; quæ debet eſſe minima, cujus valor differentialis eſt $= n\nu.\left(-dx + d.\frac{2p}{q} + \frac{1}{dx}\,dd.\frac{(1+pp)}{qq}\right)$; unde iſta naſcitur æquatio $n\,dx^2 = dx\,d.\frac{2p}{q} + dd.\frac{(1+pp)}{qq}$; quæ integrata dat $nx\,dx = \frac{2p\,dx}{q} + d.\frac{1+pp}{qq} + b\,dx$. Illa vero eadem æquatio, per p multiplicata, dat $n\,dx\,dy = dy\,d.\frac{2p}{q} + p\,dd.\frac{1+pp}{qq}$; cujus integrale eſt $ny\,dx = c\,dx - \frac{2\,dx}{q} + p\,d.\frac{1+pp}{qq}$. His æquationibus conjungendis, oritur $nx\,dy - ny\,dx = b\,dy - c\,dx + \frac{2p\,dy}{q} + \frac{2\,dx}{q} = b\,dy - c\,dx + \frac{2\,dx^2 + 2\,dy^2}{dp}$. Ponatur $nx - b = nt$, & $ny - c = nu$; erit $dy = du$, & $dx = dt$, atque $n\,dp = \frac{2\,dt^2 + 2\,du^2}{t\,du - u\,dt} = \frac{n\,dd\,u}{dt}$, ſeu $2\,dt^2 + 2\,dt\,du^2 = nt\,du\,dd\,u - nu\,dt\,dd\,u$, poſito dt conſtante. Sit $u = st$, erit $du = s\,dt + t\,ds$, & $dd\,u = t\,dd\,s + 2\,dt\,ds$; hiſque ſubſtitutis prodibit iſta æquatio: $2(1+ss)\,dt^3 + 4st\,dt^2\,ds + 2(1-n)\,tt\,dt\,ds^2 = nt^3\,ds\,dd\,s$. Ponatur $t = e^{\int r\,ds}$, erit $dt = e^{\int r\,ds} r\,ds$, & $dd\,t = 0 = e^{\int r\,ds}(r\,dd\,s + dr\,ds + r\,r\,ds^2)$; unde fit $dd\,s = -\frac{dr\,ds}{r} - r\,ds^2$; ex quibus tandem emergit $2(1+ss)\,r^3\,ds + 4sr^3\,ds + 2(1-n)\,r\,ds = -\frac{n\,dr}{r} - nr\,ds$, ſeu $\frac{n\,dr}{r} + (2-n)\,r\,ds +$

$4sr^2ds + 2r^3ds + 2r^3s^2ds = 0$. Sit $s = v - \frac{1}{r}$, fiet $dr + rrdv = \frac{ndv}{2(1+vv)}$; quæ æquatio integrationem admittit, quoties eſt $n = 2i(i-1)$ denotante i numerum integrum quemcunque : ut ſi ſit $n = 4$, fiet $r = \frac{2v}{1+vv} + \frac{1}{(1+vv)^2 \int \frac{dv}{(1+vv)^2}}$; ex qua retrogrediendo conſtructio abſolvi poterit.

EXEMPLUM X.

50. *Inter omnes curvas, in quibus* $\int x T dx$ *eundem obtinet valorem; invenire eam in qua ſit* $\int y T dx$ *maximum vel minimum, exiſtente* T *functione quacunque ipſius* p, *ita ut ſit* $dT = P dp$.

Ad formulæ $\int x T dx$ valorem differentialem inveniendum, notandum eſt eſſe $d.xT = Tdx + xPdp$, ex quo illius valor differentialis erit $= -nv.d.xP$. Ex altera autem formula $\int yTdx$ habetur $d.yT = Tdy + yPdp$, unde ejus valor differentialis erit $nv.(Tdx - d.yP)$. Quare, pro curva quæſita orietur iſta æquatio $nd.xP = Tdx - d.yP$. Ergo $\int Tdx = nxP + yP + b$. Porro ſi illa æquatio per p multiplicetur, habebitur $npd.xP = Tdy - pd.yP = d.yT - yP.dp - pd.yP = d.yT - d.yPp$. At eſt $pd.xP = Ppdx + pxdP + xPdp + Tdx - d.xT = d.xPp + Tdx - dxT$. Quamobrem orietur $d.yT - d.yPp = nd.xPp + nTdx - nd.xT$; hincque $\int nTdx = yT - yPp - nxPp + nxT + c$. Quia vero, ex ſuperiori integratione habemus $\int nTdx = nnxP + nyP + nb$, erit, eliminando $\int nTdx$, iſta æquatio $nnxP + nyP + nb = yT - yPp - nxPp + nxT + c$, ſeu $y = \frac{nx(nP + Pp - T) + c}{-nP - Pp + T}$, vel $y = -nx + \frac{c}{T - nP - Pp}$.

Ergo.

Ergo prodit tandem $x = c\int \frac{dP}{(T - nP - Pp)^2}$, atque $y = c\int \frac{p\,dP}{(T - nP - Pp)^2} = \frac{c}{T - nP - Pp}$ — . . . . . $nc\int \frac{dP}{(T - nP - Pp)^2}$

EXEMPLUM XI.

51. *Invenire curvam, quæ, inter omnes alias intra eosdem terminos contentas, & eundem formulæ* $\int x\,dx\sqrt{(1+pp)}$ *valorem continentes, habeat* $\int y\,dx\sqrt{(1+pp)}$ *maximum vel minimum.*

Exemplum hoc est Casus præcedentis, atque ex illo manat, ponendo $T = \sqrt{(1+pp)}$, ex quo erit $P = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, & $dP = \frac{dp}{(1+pp)^{3:2}}$. Porro vero erit $T - nP - Pp = \frac{1-np}{\sqrt{(1+pp)}}$. Ex his jam surrogatis, prodibit $x = c\int \frac{dp}{(1-np)^2\sqrt{(1+pp)}}$ & $y = \frac{c\sqrt{(1+pp)}}{1-np} - nx$. Integratione autem per logarithmos instituta fiet . . . .

$$x = \frac{nc(p+\sqrt{(1+pp)})-c}{(1+nn)(1-np)} + \frac{c}{(1+nn)^{3:2}} \times l\,\frac{n+(1+\sqrt{(1+nn)})(p+\sqrt{(1+pp)})}{n+(1-\sqrt{(1+nn)})(p+\sqrt{(1+pp)})} + b, \text{ \&}$$

$$y = \frac{nc+c(\sqrt{(1+pp)}-nn)}{(1+nn)(1-np)} - \frac{nc}{(1+nn)^{3:2}} \times l\,\frac{n+(1+\sqrt{(1+nn)})(p+\sqrt{(1+pp)})}{n+(1-\sqrt{(1+nn)})(p+\sqrt{(1+pp)})} - nb;$$

ex quibus valoribus curva construi poterit per logarithmos. Generaliter autem, quamcunque T functionem ipsius p denotet, constructio semper per quadraturas absolvi potest. Cæterum hoc Exemplum sine subsidio præcedentis multo difficilius solutu fuisset;

ſet; non tam facile enim perſpicere licuiſſet, quomodo æquatio inventa integrabilis redderetur quam in caſu generali.

PROPOSITIO V. PROBLEMA.

§ 2. *Inter omes curvas ad eandem abſciſſam* = a *relatas, quæ eundem formulæ* $\Pi = \int [Z]\,dx$ *valorem recipiunt; invenire eam, in qua ſit* $\int Z\,dx$ *maximum vel minimum; exiſtente* Z *functione ſimul ipſius* Π, *ita ut ſit* $dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq +$ &c. *atque* $d[Z] = [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq +$ &c.

SOLUTIO.

Quoniam eſt $d[Z] = [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq +$ &c. erit formulæ $\int [Z]\,dx$, quæ hîc quantitatem omnibus curvis communem repræſentat, valor differentialis = $n\nu.\,dx\left([N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2} -\right.$ &c.$\left.\right)$, qui ex Caſu primo §. 7 Cap. præced. ſequitur. At formula $\int Z\,dx$, maximum minimumve exprimens, quia Z involvit formulam integralem $\Pi = \int [Z]\,dx$, pertinet ad Caſum ſecundum loci citati: ejuſque adeo valor differentialis erit = $n\nu.\,dx\left(N + [N]V - \frac{d(P + [P]V)}{dx} + \frac{dd(Q + [Q]V)}{dx^2} -\right.$ &c.$\left.\right)$, denotante $V = H - \int L\,dx$, ubi H eſt quantitas determinata, quæ oritur ſi in integrali $\int L\,dx$ ponatur $x = a$. Atque, ob hanc ipſam quantitatem H, iſte valor differentialis a præſcripta longitudine abſciſſæ $x = a$ pendet. Ex his igitur duobus valoribus differentialibus ambarum formularum propoſitarum, quarum altera proprietatem communem, altera maximum minimumve exponit, ſecundum regulam datam, naſcitur æquatio pro curva ſequens:

$$0 = a[N] - \frac{a\,d[P]}{dx} + \frac{a\,dd[Q]}{dx^2} - \text{&c.} + N + [N]V - \frac{d(P + [P]V)}{dx} + \frac{dd(Q + [Q]V)}{dx^2} - \text{&c.}$$

quæ, ob $V = H -$

$H - \int L dx$, transit in hanc $o = N + (\alpha + H - \int L dx\,[N] - \frac{d(P + (\alpha + H - \int L dx)[P])}{dx} + \frac{dd(Q + (\alpha + H - \int L dx)[Q])}{dx^2}$ — &c.

Cum jam α sit quantitas constans arbitraria; etiamsi H sit quantitas constans determinata, tamen $\alpha + H$ fiet quantitas arbitraria: ideoque non amplius a definita abscissæ longitudine x pendet. Quare si, loco $\alpha + H$, scribamus C, habebimus pro curva quæsita hanc æquationem:

$o = N + (C - \int L dx)\,[N] - \frac{d(P + (C - \int L dx)[P])}{dx} + \frac{dd(Q + (C - \int L dx)[Q])}{dx^2}$ — &c. quæ ergo pro quacunque abscissa exhibet Curvam, quæ, inter omnes alias eundem formulæ $\int [Z] dx$ valorem recipientes, continebit formulæ $\int Z dx$ maximum minimumve valorem. Q. E. I.

Coroll. I.

53. Si igitur proprietas communis fuerit ea ipsa formula integralis, quæ in maximi minimive formula implicatur; tum consideratio determinatæ abscissæ magnitudinis ex calculo egreditur, & Curva inventa pro quavis abscissa quæsito satisfaciet.

Coroll. II.

54. In hac æquatione inventa, duæ adhuc inerunt formulæ integrales; primo nempe formula $\int L dx$, ac deinde formula $\Pi = \int [Z] dx$, quæ cum ea in Z contineatur, inerit in quantitatibus L, M, N, P &c.

Coroll. III.

55. Si igitur hæc integralia per differentiationem tollere iubeat; pervenietur ad differentialia binis gradibus altiora, simuque exibit constans arbitraria C. Interim tamen numerus cons-

tantium arbitrariarum unitate minor erit quam gradus iſte differentialium; eo quod integrale $\Pi = \int [Z]\,dx$ definitum obtinere debet valorem, eum ipſum ſcilicet, quem in maximi minimive formula $\int Z\,dx$ habet.

COROLL. IV.

56. Hinc igitur in æquatione inventa, ob conſtantem arbitrariam C, poteſtate una plures inerunt conſtantes, quam differentialium gradus indicat. Quarum una eo determinabitur, ut valor formulæ communis $\Pi = \int [Z]\,dx$ fiat pro curva inventa datæ magnitudinis; reliquæ vero per data puncta vel tangentium poſitionem datam determinabuntur.

COROLL. V.

57. Si Z fuerit functio cum quantitatum x, y, p, q, &c. tum arcus curvæ s: atque inter omnes Curvas iſoperimetras quæratur ea, in qua ſit $\int Z\,dx$ maximum vel minimum; tum fiet $\Pi = s = \int [Z]\,dx$ & $[Z] = \sqrt{(1+pp)}$, ita ut ſit $[M] = 0$, $[N] = 0$, & $[P] = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$;

COROLL. VI.

58. Hoc igitur caſu, ſi fuerit $dZ = L\,ds + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq +$ &c. habebitur pro Curva quæ, inter omnes iſoperimetras, habeat $\int Z\,dx$ maximum vel minimum, iſta æquatio:

$$0 = N - \frac{1}{dx}\,d\left(P + \frac{(C - \int L\,dx)\,p}{\sqrt{(1+pp)}}\right) + \frac{d\,d\,Q}{dx^2} - \text{&c.}$$

ſeu $$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d\,d\,Q}{dx^2} = \frac{(C - \int L\,dx)\,dp}{dx\,(1+pp)^{3:2}} - \frac{Lp}{\sqrt{(1+pp)}}$$

ſive $$\frac{Lp}{\sqrt{(1+pp)}} + N - \frac{dP}{dx} + \frac{d\,d\,Q}{dx^2} - \text{&c.} = \frac{(C - \int L\,dx)\,dp}{dx\,(1+pp)^{3:2}}$$

Co-

COROLL. VII.

59. Cum ſit C quantitas arbitraria; in genere notari convenit, quod ſi pro C accipiatur ille formulæ $\int L\,dx$ valor, quem inducit ſi ponatur $x = a$, tum prodituram eſſe curvam, quæ inter omnes omnino curvas eidem abſciſſæ $x = a$ reſpondentes, habeat valorem formulæ $\int Z\,dx$ maximum vel minimum.

SCHOLION I.

60. Caſus Coroll. 6, quia is ab Auctoribus potiſſimum tractari eſt ſolitus, peculiarem evolutionem meretur, ut ejus ope Problemata quæ forte occurrere queant, facilius & expeditius reſolvi poſſint. Inter omnes igitur Curvas iſoperimetras, ſeu quæ eandem habeant longitudinem $s = \int dx \sqrt{(1+pp)}$, quæratur ea, in qua ſit $\int Z\,dx$ maximum vel minimum, exiſtente Z functione cum quantitatum definitarum x, y, p, q &c. tum arcus curvæ s; ita ut ſit $dZ = L\,ds + M\,dx + N\,dp + P\,dp +$ &c. Pro curva hac proprietate gaudente jam inventa eſt hæc æquatio: $\frac{1}{dx}\,d.\frac{(C - \int L\,dx)\,p}{\sqrt{(1+pp)}} = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} -$ &c. quæ quidem, in hoc latiſſimo ſenſu nec integrari nec ad ſimpliciorem formam ſe reduci patitur. At caſus notaſſe juvabit, quibus eam integrare licebit. Ac primo quidem ſi ſit $N = 0$ ſponte prodit iſta pro curva æquatio:

$$A + \frac{(C - \int L\,dx)\,p}{\sqrt{(1+pp)}} = -P + \frac{dQ}{dx} - \text{ &c.}$$

jam ſemel integrata. Secundo ponamus eſſe $M = 0$; atque æquatio per $p\,dx = dy$ multiplicata abibit in hanc

$$p\,d.\frac{(C - \int L\,dx)\,p}{\sqrt{(1+pp)}} = N\,dy - P\,dp + \frac{p\,dQ}{dx} - \text{ &c.}$$

ad quam ſi addatur $L\,ds = L\,dx\sqrt{(1+pp)} = dZ - N\,dy - P\,dp - Q\,dq$ &c.; integratione inſtituta prodibit $\int\left(L\,dx\sqrt{(1+pp)} + \frac{p\,d.(C - \int L\,dx)\,p}{\sqrt{(1+pp)}}\right) = Z - Pp - Qq + \frac{p\,dQ}{dx}$ &c.

Prius

Prius vero membrum ſi evolvatur, tranſit in $\int (Ldx\sqrt{(1+pp)} + \frac{(C-\int Ldx)pdp}{(1+pp)^{3:2}} - \frac{Lppdx}{\sqrt{(1+pp)}}) = \int (\frac{Ldx}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{(C-\int Ldx)pdp}{(1+pp)^{3:2}})$, cujus integrale eſt $-\frac{C-\int Ldx}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quare, caſu quo $M=0$, habebitur iſta æquatio $\frac{C-\int Ldx}{\sqrt{(1+pp)}} = A - Z + Pp + Qq - \frac{pdQ}{dx}$. Sin autem tertio fuerit tam $M=0$ quam $N=0$, habebitur primum, ob $N=0$, hæc æquatio: $A + \frac{(C-\int Ldx)p}{\sqrt{(1+pp)}} = -P + \frac{dQ}{dx}$; quæ, multiplicata per $dp = qdx$, abit in hanc $Adp + \frac{(C-\int Ldx)pdp}{\sqrt{(1+pp)}} = -Pdp + Qdq$. Cum autem ſit $dZ = Ldx\sqrt{(1+pp)} + Pdp + Qdq$, habebitur $dZ + Adp - Ldx\sqrt{(1+pp)} + \frac{(C-\int Ldx)pdp}{\sqrt{(1+pp)}} = qdQ + Qdq$; quæ integrata dabit, $Z + B + Ap + (C-\int Ldx)\sqrt{(1+pp)} = Qq$, ſeu $C - \int Ldx = \frac{Qq - B - Ap - Z}{\sqrt{(1+pp)}}$. At ex priore æquatione eſt $C - \int Ldx = -\frac{A\sqrt{(1+pp)}}{p} - \frac{P\sqrt{(1+pp)}}{p} + \frac{dQ\sqrt{(1+pp)}}{pdx}$; ex quibus conjungendis elicitur: $Adx - Bdy = Zdy - Pdx - Ppdy + dQ + ppdQ - Qpdp$, in qua non amplius ineſt formula integralis $\int Ldx$. Uſum igitur horum caſuum in Exemplis monſtrabimus.

EXEMPLUM I.

61. *Inter omnes curvas iſoperimetras; definire eam, in qua ſit* $\int s^n dx$ *maximum vel minimum, denotante* s *arcum curvæ abſciſſa* x *reſpondentem.*

Quo-

Quoniam proprietas communis longitudinem arcus $s = \int dx \sqrt{(1+pp)}$ respicit, atque in maximi minimive formula $\int s^n dx$ inest ipse arcus, solutio pertinebit ad Casum in Scholio pertractatum. Comparata ergo formula $\int s^n dx$ cum generali $\int Z dx$, fiet $Z = s^n$ & $dZ = n s^{n-1} ds$; hincque $L = n s^{n-1}$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$ &c. Quare ex Scholii Casu ultimo, quo posueramus $M = 0$ & $N = 0$, habebitur ista æquatio $A dx - B dy = Z dy = s^n dy$, ex qua oritur $A dx = dy (B + s^n)$ & $A^2 dx^2 + A^2 dy^2 = A^2 ds^2 = dy^2 (A^2 + (B + s^n)^2)$ ideoque $dy = \frac{A ds}{\sqrt{(A^2 + (B+s^n)^2)}}$

atque $dx = \frac{(B+s^n) ds}{\sqrt{(A^2+(B+s^n)^2)}}$; unde Curvæ constructio perfici poterit. Vel posito $dy = p dx$, erit $s^n = \frac{A - Bp}{p}$; atque $s = \sqrt[n]{\frac{A - Bp}{p}}$: ex quo fiet $ds = dx\sqrt{(1+pp)} = -\frac{A dp (A - Bp)^{(1-n):n}}{n p^{(1+n):n}}$. Atque hinc per p coordinatæ curvæ x & y ita determinabuntur, ut sit $x = -\frac{A}{n} \int \frac{dp (A - Bp)^{(1-n):n}}{p^{(1+n):n} \sqrt{(1+pp)}}$ & $y = -\frac{A}{n} \int \frac{dp (A - Bp)^{(1-n):n}}{p^{1:n} \sqrt{(1+pp)}}$.

Videntur hîc quidem quatuor constantes, duæ scilicet novæ, præter A & B, ingredi, ob duplicem integrationem y & x. At cum posito $x = 0$, simul arcus curvæ $s = \sqrt[n]{\frac{A - Bp}{p}}$ evanescere debeat; hinc vicissim constans in integratione ipsius x orta definietur. Nimirum si n fuerit numerus affirmativus, ar-

cus s evaneſcit, poſito $p = \frac{A}{B}$; ex quo valor ipſius x ita determinari debet, ut poſito $p = \frac{A}{B}$ fiat $= 0$.

Quod ſi ponatur $n = 1$; habebitur ex priore conſtructione, ſtatim $dx = \frac{(B+s)\,ds}{\sqrt{(A^2+(B+s)^2)}}$; ideoque $x = \sqrt{(A^2 + B^2 + 2Bs + ss)} - \sqrt{(A^2+B^2)}$, ſeu poſito $B = b$, & $\sqrt{(A^2+B^2)} = c$, erit $x + c = \sqrt{(c^2 + 2bs + ss)}$. Ex poſteriore autem conſtruendi modo, oritur $x = \int \frac{dp}{pp\sqrt{(1+pp)}} = \frac{A\sqrt{(1+pp)}}{p} + b$, ſeu $(x-b)p = c\sqrt{(1+pp)}$; hincque $p = \frac{c}{\sqrt{((x-b)^2 - c^2)}} = \frac{dy}{dx}$. Quare cum ſit $y = \int \frac{c\,dx}{\sqrt{((x-b)^2 - c^2)}}$; curva ſatisfaciens erit Catenaria.

EXEMPLUM II.

62. *Inter omnes curvas ejuſdem longitudinis, eam determinare, in qua ſit* $\int Sdx$ *maximum vel minimum, exiſtente* S *functione quacunque arcus* s.

Quia proprietas communis arcu $s = \int dx\sqrt{(1+pp)}$ continetur ; ſolutio ex Scholio peti poterit. Scilicet cum ſit $Z = S =$ functioni ipſius s, erit $L\,ds = dS$, & $M = N = P = Q$ &c. $= 0$. Quare, per tertium Scholii Caſum, habebitur pro curva quæſita iſta æquatio $A\,dx - B\,dy = S\,dy$, & $A\,dx = dy\,(B+S)$. Hinc ergo erit $A^2\,dx^2 + A^2\,dy^2 = A^2\,ds^2 = dy^2(A^2+(B+S)^2)$ & $y = \int \frac{A\,ds}{\sqrt{(A^2+(B+S)^2)}}$; erit autem abſciſſa $x = \int \frac{(B+S)\,ds}{\sqrt{(A^2+(B+S)^2)}}$; unde curvæ conſtructio abſolvi poterit.

Ponamus eſſe $S = e^s$; poſitoque $dy = p\,dx$, erit $\frac{A - Bp}{p} =$

$= e^s$, & $e^s ds = \frac{-Adp}{pp} = \frac{(A-Bp)dx\sqrt{(1+pp)}}{p}$, hincque $dx = \frac{-Adp}{(A-Bp)p\sqrt{(1+pp)}}$ & $dy = \frac{-Adp}{(A-Bp)\sqrt{(1+pp)}}$. Componendo vero fiet $dx - \frac{Bdy}{A} = \frac{-dp}{p\sqrt{(1+pp)}}$, & integrando $Ax - By = A\,l\,\frac{1+\sqrt{(1+pp)}}{p} + C$, seu $\frac{1+y(1+pp)}{p} = e^{(Ax-By-C):A}$. Cum autem, facto $s = 0$, evanescere debeat x, atque ob $\frac{A-Bp}{p} = e^s$, facto $s = 0$, fiat $p = \frac{A}{A+1}$, per integrationes efficiendum est, ut facto $p = \frac{A}{B+1}$ fiat $x = 0$.

EXEMPLUM III.

63. *Inter omnes curvas ejusdem longitudinis, determinare eam in qua sit* $\int s y\,dx$ *maximum vel minimum, denotante* s *arcum curvæ.*

Solutio hujus Quæstionis iterum petenda est ex Scholio; erit namque $Z = sy$ & $dZ = y\,ds + s\,dy$, ex quo fit $L = y$, $M = 0$ & $N = s$, reliquæ litteræ P, Q, &c. evanescent. Cum igitur sit $M = 0$, Casus Scholii secundus hanc suppeditabit solutionem: $\frac{C-\int y\,dx}{\sqrt{(1+pp)}} = A - ys$; immediate vero prodit $s\,dx = d.\,\frac{(C-\int y\,dx)p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{(C-\int y\,dx)\,dp}{(1+pp)^{3:2}} - \frac{y\,p\,dx}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quare, cum sit $C - \int y\,dx = A\sqrt{(1+pp)} - ys\sqrt{(1+pp)}$, erit $s\,dx = \frac{A\,dp - y\,s\,dp - y\,dy}{1+pp}$, seu $s\,dx + s\,p\,dy + y\,s\,dp + y\,dy = A\,dp$. Sin autem lubuerit arcum s eliminare, habebitur ex binis æquationibus $s = \frac{A}{y} - \frac{(C-\int y dx)}{y\sqrt{(1+pp)}}$ $= \frac{(C-\int y dx)\,dp}{dx(1+pp)^{3:2}}$

$-\frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}}$; hincque $\frac{Adx}{y}+\frac{ypdx}{\sqrt{(1+pp)}}=(C-\int ydx)$ $(\frac{dp}{(1+pp)^{3:2}}+\frac{dx}{y\sqrt{(1+pp)}})$. In utroque autem casu difficile est ad æquationem ad curvam constructendum accommodatam pertingere.

EXEMPLUM IV.

64. *Inter omnes curvas eandem aream* $\Pi=\int y\,dx$ *continentes, definire eam, in qua sit* $\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\Pi}$ *maximum vel minimum.*

Si hanc Quæstionem cum Solutione generali comparemus, habebimus $\int[Z]dx=\int ydx$; hincque $[Z]=y$, & $[N]=1$; reliquis litteris $[M][P][Q]$, &c. evanescentibus. Porro erit $Z=\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\Pi}$, & $dZ=-\frac{d\Pi\sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2}+\frac{pdp}{\Pi\sqrt{(1+pp)}}$, unde erit $L=-\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2}$, $M=0$, $N=0$, & $P=\frac{p}{\Pi\sqrt{(1+pp)}}$. Quocirca pro curva quæsita sequens emerget æquatio:

$$0=C+\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2}-\frac{1}{dx}\,d.\,\frac{p}{\Pi\sqrt{(1+pp)}}.$$

Multiplicetur hæc æquatio per $dy=p\,dx$, erit $0=C\,dy+dy\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2}-p\,d.\,\frac{p}{\Pi\sqrt{(1+pp)}}$, quæ integrata dabit:

$$0=B+Cy+y\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2}-\int\frac{d\Pi\sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2}-\frac{pp}{\Pi\sqrt{(1+pp)}}+\int\frac{pdp}{\Pi\sqrt{(1+pp)}}=B+Cy+y\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2}-\frac{pp}{\Pi\sqrt{(1+pp)}}+\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\Pi}.$$

Hinc itaque istam obtinebimus æquationem $0=B+Cy+y\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2}+\frac{1}{\Pi\sqrt{(1+pp)}}$; a qua si prior per y multiplicata subtrahatur, erit

$0=$

$$o = B + \frac{1}{\Pi\sqrt{(1+pp)}} + \frac{y}{dx}\,d.\,\frac{p}{\Pi\sqrt{(1+pp)}}, \text{ seu}$$

$$o = Bdx + \frac{dx}{\Pi\sqrt{(1+pp)}} + \frac{y\,dp}{\Pi(1+pp)^{3:2}} - \frac{y^2\,p\,dx}{\Pi^2\sqrt{(1+pp)}}$$

ex qua æquatione si denuo $\Pi = \int y\,dx$ exterminare velimus, prodiret æquatio differentialis tertii ordinis, ex qua multo minus quicquam ad Curvam cognoscendam deduci posset.

SCHOLION II.

65. Quanquam, in hac Propositione posuimus [Z] esse functionem determinatam quantitatum x, y, p, q, &c. tamen Methodus solvendi patet, si hæc ipsa quantitas [Z] fuerit functio indefinita formulas integrales in se complectens. Ponamus enim in formula $\Pi = \int [Z]\,dx$, quæ omnibus curvis debet esse communis, esse

$$d[Z] = [L]\,d\pi + [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq + \&c.$$

existente $\pi = \int [z]\,dx$, &

$$d[z] = [m]\,dx + [n]\,dy + [p]\,dp + [q]\,dq + \&c.$$

Maximum minimumve autem esse oportere formulam $\int Z\,dx$, existente: $dZ = L\,d\pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + \&c.$ Jam formula $\int [Z]\,dx$ continetur in Casu secundo §. 7 Cap. præc: inde ergo si capiatur integrale $\int [L]\,dx$ ejusque valor respondens abscissæ $x = a$, ad quam solutio debet accommodari, ponatur $= [H]$, atque $[H] - \int [L]\,dx = [V]$; habebitur formulæ $\int [Z]\,dx$ valor differentialis $= n\,v.\,dx\,([N] + [n][V] - \frac{d([P]+[p][V])}{dx} + \frac{dd([Q]+[q][V])}{dx^2} - \&c.)$. Deinde vero maximi minimive formula $\int Z\,dx$ continetur in Casu tertio loci citati; ad ejusque valorem differentialem inveniendum, ponatur formulæ $\int L\,dx$ valor abscissæ $x = a$ respondens $= H$, ac $H - \int L\,dx = V$. Jam capiatur integrale $\int [L]V\,dx = H\int [L]\,dx - \int [L]\,dx \int L\,dx$ sitque, posito $x = a$, valor formulæ $\int [L]\,dx \int L\,dx = K$, eodem autem casu formulæ $\int [L]\,dx$ valor est $= [H]$, ex quo formulæ

$\int [L] V dx$, caſu $x = a$, valor erit $= H \cdot H] - K$, & vocetur $H \cdot H] - K - H \int [L] dx + \int [L] dx \int L dx = W$, ita ut ſit $W = H [V] - K + \int [L] dx \int L dx$, eritque formulæ propoſitæ $\int Z dx$ valor differentialis $=$ n v. $dx (N + [N] V + [n] W - \frac{d.(P + [P] V + [p] W)}{dx} + \frac{dd(Q + [Q] V + [q] W)}{dx^2}$ — &c.). Quod ſi jam ad hunc valorem differentialem addatur præcedens per quantitatem conſtantem arbitrariam α multiplicatus, ſummaque ponatur $= 0$, prodibit æquatio pro curva quæſita hæc :

$0 = N + [N](\alpha + V) + [n](\alpha [V] + W) - \frac{1}{dx} \cdot$
$d(P + [P](\alpha + V) + [p](\alpha [V] + W) + \frac{1}{dx^2} \cdot$
$dd(Q + [Q](\alpha + V) + [q](\alpha [V] + W) —$ &c. Eſt vero hic $\alpha + V = \alpha + H - \int L dx$; unde ſi ponatur $\alpha + H = C$, erit C conſtans arbitraria, & $\alpha + V = C - \int L dx$, atque $\alpha [V] + W = C [H] - K - C \int [L] dx + \int [L] dx \int L dx$. Hoc igitur pacto, pervenietur ad curvam quæſitam, in cujus æquatione, quia ob $[H]$ & K adhuc ineſt conſtans data a, ea quæſito ſatisfaciet tantum pro propoſita abſciſſa $x = a$. Quod ſi autem formularum ambarum altera ad Caſum 4, altera ad Caſum 5 pertineat, tum iterum conſideratio datæ abſciſſæ a ex calculo egreditur, eademque curva pro omni abſciſſa ſatisfaciet, id quod unico ſequenti Exemplo declaraſſe ſufficiet.

EXEMPLUM V.

66. *Inter omnes curvas eidem abſciſſæ reſpondentes, quæ eundem formulæ* v *valorem recipiunt; invenire eam, in qua ſit* $\int \frac{dx \sqrt{(1 + nn)}}{v}$ *maximum vel minimum, exiſtente* $dv = g dx + W dx \sqrt{(1 + pp)}$ *& W functione quacunque ipſius* v.

Solutio hujus Quæſtionis exhibebit curvam ſuper quâ corpus deſcen-

descendens a gravitate uniformi g deorsum, in directione abscissarum sollicitatum in medio quocunque resistente celerrime delabitur, inter omnes alias curvas super quibus descendendo eandem acquirit celeritatem. Est enim $\sqrt{v}$ celeritas corporis in quocunque curvæ puncto, & W exprimit resistentiam medii. Quod nunc primum ad proprietatem communem $v = \int dx(g + W\sqrt{(1+pp)})$; ponamus esse $dW = U\,dv$, atque hæc formula ad Casum quartum pertinebit; erit namque $n = v$, & $Z = g + W\sqrt{(1+pp)}$, ac $dZ = U\,dv\,\sqrt{(1+pp)} + \frac{W\,p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$; unde erit $L = U\sqrt{(1+pp)}$, $M = 0$, $N = 0$, & $P = \frac{Wp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Sumatur ergo integrale $\int U dx\sqrt{(1+pp)}$, sitque, casu quo $x = a$ ponitur, $e^{\int U dx\sqrt{(1+pp)}} = H$, ac ponatur $V = He^{-\int U dx\sqrt{(1+pp)}}$. Ex his erit formulæ v valor differentialis $= n\,v.\,dx\left(-\frac{1}{dx}\,d.\,\frac{WVp}{\sqrt{(1+pp)}}\right)$ $= -n\,v.\,d.\,\frac{WVp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Porro maximi minimive formula $\int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$ pertinebit ad Casum quintum; eritque $Z = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$, & $dZ = -\frac{dv\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} + \frac{p\,dp}{\sqrt{v(1+pp)}}$; ideoque $n = v$, & $L = -\frac{\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$; $M = 0$, $N = 0$, & $P = \frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}}$. Deinde vero, ob $v = \int dx\,(g + W\sqrt{(1+pp)})$, erit $[Z] = g + W\sqrt{(1+pp)}$, & $d[Z] = U\,dv\sqrt{(1+pp)} + \frac{W\,p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$; unde $[L] = U\sqrt{(1+pp)}$, $[M] = 0$, $[N] = 0$, & $[P] = \frac{Wp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Ponatur, si post integrationem fiat $x = a$, $-\int e^{\int U dx\sqrt{(1+pp)}} \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} = K$, sitque

fitque $e^{-\int U dx \sqrt{(1+pp)}} (K + \int e^{\int U dx \sqrt{(1+pp)}} \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}) = T$:
atque erit formulæ $\int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$ valor differentialis $=$
$nv.dx\,(\frac{1}{dx}d(\frac{p}{\sqrt{v}(1+pp)}) + \frac{WTp}{\sqrt{(1+pp)}}) = -nv.d(\frac{p}{\sqrt{v}(1+pp)}$
$+\frac{WTp}{\sqrt{(1+pp)}})$. Ex his duobus valoribus differentialibus inventis
nascitur pro curva quæsita sequens æquatio, $0 = \alpha d.\frac{WVp}{\sqrt{(1+pp)}}$
$+ d(\frac{p}{\sqrt{v}(1+pp)} + \frac{WTp}{\sqrt{(1+pp)}})$, & integrando, $B = \frac{p}{\sqrt{v}(1+pp)}$
$+\frac{Wp(\alpha V+T)}{\sqrt{(1+pp)}}$. At est $\alpha V + T = e^{-\int U dx \sqrt{(1+pp)}}$
$(\alpha H + K + \int e^{\int U dx \sqrt{(1+pp)}} \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}})$. Quod si ergo
ponatur $\alpha H + K = C$, erit C constans arbitraria, atque quantitas definita α omnino ex æquatione evanescet; ideoque curva quæsita desideratam proprietatem pro quavis abscissa possidebit. Pro curva quæsita habebitur ergo ista æquatio:
$e^{\int U dx \sqrt{(1+pp)}} (\frac{B\sqrt{(1+pp)}}{Wp} - \frac{1}{W\sqrt{v}}) = C +$
$\int e^{\int U dx \sqrt{(1+pp)}} \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$, & differentiando $\frac{-Bdp}{Wp^2\sqrt{(1+pp)}}$
$-\frac{BUdv\sqrt{(1+pp)}}{W^2p} + \frac{Udv}{W^2\sqrt{v}} + \frac{dv}{2Wv\sqrt{v}} + \frac{BUdx(1+pp)}{Wp}$
$-\frac{Udx\sqrt{(1+pp)}}{W\sqrt{v}} = \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$. Cum autem sit dv
$= g\,dx + W\,dx\sqrt{(1+pp)}$, habebimus facta substitutione,
hanc æquationem $\frac{Bdp}{Wp^2\sqrt{(+pp)}} = \frac{g\,dx}{2Wv\sqrt{v}} + \frac{gUdx}{W^2\sqrt{v}} -$
$\frac{gBUdx\sqrt{(1+pp)}}{W^2p}$, sive istam $\frac{2BWdp}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{gWp^2dx}{v\sqrt{v}} +$
$\frac{2gUp^2dx}{\sqrt{v}} - 2gBUpdx\sqrt{(1+pp)}$. Multiplicetur hæc æquatio per dv, & in primo termino loco dv scribatur $g\,dx + W\,dx$

$Wdx\sqrt{(1+pp)}$, ac dW loco Udv; quo facto, habebitur ista æquatio $\frac{2gBdp}{W\sqrt{(1+pp)}} + 2Bdp - \frac{gp^2dv}{Wv\sqrt{v}} = \frac{2gppdW}{W^2\sqrt{v}} - \frac{2gBpdW\sqrt{(1+pp)}}{W^2}$; quæ divisa per p^2 fit integralis; eritque æquatio integrata hæc, $2C - \frac{2B}{p} = \frac{2gB\sqrt{(1+pp)}}{Wp} = \frac{2g}{W\sqrt{v}}$, sive $W = \frac{gB\sqrt{v(1+pp)} - gp}{Cp\sqrt{v} - B\sqrt{v}} = \frac{dv - gdx}{dx\sqrt{(1+pp)}}$. Unde nascitur æquatio a resistentia W libera hæc, $(Cp - B)dv = gCpdx + gBppdx - \frac{gpdx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$

Cum autem W sit functio ipsius v data, ope æquationis $W\sqrt{v} = \frac{gB\sqrt{v(1+pp)} - gp}{Cp - B}$, dabitur p per v; qui valor si in præcedente æquatione substituatur, dabitur dx per v & dv; hincque curva quæsita poterit construi.

PROPOSITIO VI. PROBLEMA.

67. Inter omnes curvas proprietate communi A *praeditas, determinare eam, in qua sit functio quaecunque, cum ipsius illius expressionis* A, *tum alius cujuscunque* B, *maximum vel minimum.*

SOLUTIO.

Sit dA valor differentialis expressionis A, atque dB valor differentialis expressionis B; habebit functionis illius ipsarum A & B, quam maximum minimumve esse oportet, valor differentialis hujusmodi formam $\alpha dA + \mathfrak{G}dB$; in qua constantes α & $\mathfrak{G}$ a ratione compositionis qua expressiones A & B in illa functione inter se permiscentur pendent; ita ut valores obtineant determinatos ab abscissæ quantitate, cui solutionem accomodatam esse oportet pendentes. Quoniam vero expressionis A, quæ proprietatem communem complectitur, valor differentialis est

Prius vero membrum ſi evolvatur, tranſit in $\int(L dx \sqrt{(1+pp)} + \frac{(C-\int L dx)p dp}{(1+pp)^{3:2}} - \frac{L p p dx}{\sqrt{(1+pp)}}) = \int(\frac{L dx}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{(C-\int L dx)p dp}{(1+pp)^{3:2}})$, cujus integrale eſt $-\frac{C-\int L dx}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quare, caſu quo $M = 0$, habebitur iſta æquatio $\frac{C-\int L dx}{\sqrt{(1+pp)}} = A - z + Pp + Qq - p\frac{dQ}{dx}$. Sin autem tertio fuerit tam $M = 0$ quam $N = 0$, habebitur primum, ob $N = 0$, hæc æquatio: $A + \frac{(C-\int L dx)p}{\sqrt{(1+pp)}} = -P + \frac{dQ}{dx}$; quæ, multiplicata per $dp = q dx$, abit in hanc $A dp + \frac{(C-\int L dx)p dp}{\sqrt{(1+pp)}} = -P dp + Q dq$. Cum autem ſit $dZ = L dx \sqrt{(1+pp)} + P dp + Q dq$, habebitur $dZ + A dp - L dx \sqrt{(1+pp)} + \frac{(C-\int L dx)p dp}{\sqrt{(1+pp)}} = q dQ + Q dq$; quæ integrata dabit, $Z + B + Ap + (C-\int L dx)\sqrt{(1+pp)} = Qq$, ſeu $C - \int L dx = \frac{Qq - B - Ap - Z}{\sqrt{(1+pp)}}$. At ex priore æquatione eſt $C - \int L dx = -\frac{A\sqrt{(1+pp)}}{p} - \frac{P\sqrt{(1+pp)}}{p} + \frac{dQ\sqrt{(1+pp)}}{p dx}$; ex quibus conjungendis elicitur: $A dx - B dy = z dy - P dx - P p dy + dQ + pp dQ - Qp dp$, in qua non amplius ineſt formula integralis $\int L dx$. Uſum igitur horum caſuum in Exemplis monſtrabimus.

EXEMPLUM I.

61. *Inter omnes curvas iſoperimetras; definire eam, in qua ſit* $\int s^n dx$ *maximum vel minimum, denotante* s *arcum curvæ abſciſſæ* x *reſpondentem.*

Quo-

Quoniam proprietas communis longitudinem arcus $s = \int dx \sqrt{(1 + pp)}$ respicit, atque in maximi minimive formula $\int s^{n} dx$ inest ipse arcus, solutio pertinebit ad Casum in Scholio pertractatum. Comparata ergo formula $\int s^{n} dx$ cum generali $\int Z dx$, fiet $Z = s^{n}$ & $dZ = n s^{n-1} ds$; hincque $L = n s^{n-1}$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$ &c. Quare ex Scholii Casu ultimo, quo posueramus $M = 0$ & $N = 0$, habebitur ista æquatio $A dx - B dy = Z dy = s^{n} dy$, ex qua oritur $A dx = dy (B + s^{n})$ & $A^2 dx^2 + A^2 dy^2 = A^2 ds^2 = dy^2 (A^2 + (B + s^{n})^2)$ ideoque $dy = \frac{A ds}{\sqrt{(A^2 + (B + s^{n})^2)}}$ atque $dx = \frac{(B + s^{n}) ds}{\sqrt{(A^2 + (B + s^{n})^2)}}$; unde Curvæ constructio perfici poterit. Vel posito $dy = p dx$, erit $s^{n} = \frac{A - Bp}{p}$, atque $s = \sqrt[n]{\frac{A - Bp}{p}}$: ex quo fiet $ds = dx \sqrt{(1 + pp)} = -\frac{A dp (A - Bp)^{(1-n):n}}{n p^{(1+n):n}}$. Atque hinc per p coordinatæ curvæ x & y ita determinabuntur, ut sit $x = -\frac{A}{n} \int \frac{dp (A - Bp)^{(1-n):n}}{p^{(1+n):n} \sqrt{(1 + pp)}}$ & $y = -\frac{A}{n} \int \frac{dp (A - Bp)^{(1-n):n}}{p^{1:n} \sqrt{(1 + pp)}}$. Videntur hîc quidem quatuor constantes, duæ scilicet novæ, præter A & B, ingredi, ob duplicem integrationem y & x. At cum posito $x = 0$, simul arcus curvæ $s = \sqrt[n]{\frac{A - Bp}{p}}$ evanescere debeat; hinc vicissim constans in integratione ipsius x orta definietur. Nimirum si n fuerit numerus affirmativus, ar-

cus s evaneſcit, poſito $p = \frac{A}{B}$; ex quo valor ipſius x ita determinari debet, ut poſito $p = \frac{A}{B}$ fiat $= 0$.

Quod ſi ponatur $n = 1$; habebitur ex priore conſtructione, ſtatim $dx = \frac{(B+s)\,ds}{\sqrt{(A^2+(B+s)^2)}}$; ideoque $x = \sqrt{(A^2 + B^2 + 2Bs + ss)} - \sqrt{(A^2+B^2)}$, ſeu poſito $B = b$, & $\sqrt{(A^2+B^2)} = c$, erit $x + c = \sqrt{(c^2 + 2bs + ss)}$. Ex poſteriore autem conſtruendi modo, oritur $x = \int \frac{dp}{pp\sqrt{(1+pp)}} = \frac{A\sqrt{(1+pp)}}{p} + b$, ſeu $(x-b)p = c\sqrt{(1+pp)}$; hincque $p = \frac{c}{\sqrt{((x-b)^2 - c^2)}} = \frac{dy}{dx}$. Quare cum ſit $y = \int \frac{c\,dx}{\sqrt{((x-b)^2 - c^2)}}$; curva ſatisfaciens erit Catenaria.

EXEMPLUM II.

62. *Inter omnes curvas ejuſdem longitudinis, eam determinare, in qua ſit* $\int S\,dx$ *maximum vel minimum, exiſtente* S *functione quacunque arcus* s.

Quia proprietas communis arcu $s = \int dx\sqrt{(1+pp)}$ continetur; ſolutio ex Scholio peti poterit. Scilicet cum ſit $Z =$ $S =$ functioni ipſius s, erit $L\,ds = dS$, & $M = N = P = Q$ &c. $= 0$. Quare, per tertium Scholii Caſum, habebitur pro curva quæſita iſta æquatio $A\,dx - B\,dy = S\,dy$, & $A\,dx = dy\,(B+S)$. Hinc ergo erit $A^2\,dx^2 + A^2\,dy^2 = A^2\,ds^2 = dy^2(A^2+(B+S)^2)$ & $y = \int \frac{A\,ds}{\sqrt{(A^2+(B+S)^2)}}$; erit autem abſciſſa $x = \int \frac{(B+S)\,ds}{\sqrt{(A^2+(B+S)^2)}}$; unde curvæ conſtructio abſolvi poterit.

Ponamus eſſe $S = e^s$; poſitoque $dy = p\,dx$, erit $\frac{A - Bp}{p} =$

$= e^s$, & $e^s ds = \frac{-Adp}{pp} = \frac{(A-Bp)dx\sqrt{(1+pp)}}{p}$, hincque $dx = \frac{-Adp}{(A-Bp)p\sqrt{(1+pp)}}$ & $dy = \frac{-Adp}{(A-Bp)\sqrt{(1+pp)}}$. Componendo vero fiet $dx - \frac{Bdy}{A} = \frac{-dp}{p\sqrt{(1+pp)}}$, & integrando $Ax - By = A\,l\,\frac{1+\sqrt{(1+pp)}}{p} + C$, seu $\frac{1+\sqrt{(1+pp)}}{p} = e^{(Ax-By-C):A}$. Cum autem, facto $s = 0$, evanescere debeat x, atque ob $\frac{A-Bp}{p} = e^s$, facto $s = 0$, fiat $p = \frac{A}{A+1}$, per integrationes efficiendum est, ut facto $p = \frac{A}{B+1}$ fiat $x = 0$.

EXEMPLUM III.

63. Inter omnes curvas ejusdem longitudinis, determinare eam in qua sit $\int s y dx$ *maximum vel minimum, denotante* s *arcum curvæ.*

Solutio hujus Quæstionis iterum petenda est ex Scholio; erit namque $Z = sy$ & $dZ = y\,ds + s\,dy$, ex quo fit $L = y$, $M = 0$ & $N = s$, reliquæ litteræ P, Q, &c. evanescent. Cum igitur sit $M = 0$, Casus Scholii secundus hanc suppeditabit solutionem: $\frac{C-\int y dx}{\sqrt{(1+pp)}} = A - ys$; immediate vero prodit $s\,dx = d.\frac{(C-\int y dx)p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{(C-\int y dx)dp}{(1+pp)^{3:2}} - \frac{y\,p\,dx}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quare, cum sit $C - \int y dx = A\sqrt{(1+pp)} - ys\sqrt{(1+pp)}$, erit $s\,dx = \frac{A\,dp - y\,s\,dp - y\,dy}{1+pp}$, seu $s\,dx + sp\,dy + y\,s\,dp + y\,dy = A\,dp$. Sin autem lubuerit arcum s eliminare, habebitur ex binis æquationibus, $s = \frac{A}{y} - \frac{(C-\int y dx)}{y\sqrt{(1+pp)}} = \frac{(C-\int y dx)\,dp}{dx(1+pp)^{3:2}}$

$-\frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}}$; hincque $\frac{A\,dx}{y}+\frac{yp\,dx}{\sqrt{(1+pp)}}=(C-\int y\,dx)$ $(\frac{dp}{(1+pp)^{3:2}}+\frac{dx}{y\sqrt{(1+pp)}})$. In utroque autem caſu difficile eſt ad æquationem ad curvam conſtruendum accommodatam pertingere.

EXEMPLUM IV.

64. *Inter omnes curvas eandem aream* $\Pi=\int y\,dx$ *continentes, definire eam, in qua ſit* $\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\Pi}$ *maximum vel minimum.*

Si hanc Quæſtionem cum Solutione generali comparemus, habebimus $\int\lfloor Z\rfloor dx=\int y\,dx$; hincque $[Z]=y$, & $[N]=1$; reliquis litteris $[M][P][Q]$, &c. evaneſcentibus. Porro erit $Z=\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\Pi}$, & $dZ=-\frac{d\Pi\sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2}+\frac{p\,dp}{\Pi\sqrt{(1+pp)}}$, unde erit $L=-\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2}$, $M=0$, $N=0$, & $P=\frac{p}{\Pi\sqrt{(1+pp)}}$. Quocirca pro curva quæſita ſequens emerget æquatio:

$$0=C+\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2}-\frac{1}{dx}\,d.\,\frac{p}{\Pi\sqrt{(1+pp)}}.$$

Multiplicetur hæc æquatio per $dy=p\,dx$, erit $0=C\,dy+dy\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2}-p\,d.\,\frac{p}{\Pi\sqrt{(1+pp)}}$, quæ integrata dabit:

$$0=B+Cy+y\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2}-\int\frac{d\Pi\sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2}-\frac{pp}{\Pi\sqrt{(1+pp)}}+\int\frac{p\,dp}{\Pi\sqrt{(1+pp)}}=B+Cy+y\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2}-\frac{pp}{\Pi\sqrt{(1+pp)}}+\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\Pi}.$$

Hinc itaque iſtam obtinebimus æquationem $0=B+Cy+y\int\frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2}+\frac{1}{\Pi\sqrt{(1+pp)}}$; a qua ſi prior per y multiplicata ſubtrahatur, erit

$0=$

$$o = B + \frac{1}{\Pi\sqrt{(1+pp)}} + \frac{y}{dx}\,d.\,\frac{p}{\Pi\sqrt{(1+pp)}}, \text{ seu}$$

$$o = Bdx + \frac{dx}{\Pi\sqrt{(1+pp)}} + \frac{y\,dp}{\Pi(1+pp)^{3:2}} - \frac{y^2 p\,dx}{\Pi^2\sqrt{(1+pp)}}$$

ex qua æquatione si denuo $\Pi = \int y\,dx$ exterminare velimus, prodiret æquatio differentialis tertii ordinis, ex qua multo minus quicquam ad Curvam cognoscendam deduci posset.

SCHOLION II.

65. Quanquam, in hac Propositione posuimus $[Z]$ esse functionem determinatam quantitatum x, y, p, q, &c. tamen Methodus solvendi patet, si hæc ipsa quantitas $[Z]$ fuerit functio indefinita formulas integrales in se complectens. Ponamus enim in formula $\Pi = \int [Z]\,dx$, quæ omnibus curvis debet esse communis, esse

$$d[Z] = [L]\,d\pi + [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq + \text{&c.}$$

existente $\pi = \int [z]\,dx$, &

$$d[z] = [m]\,dx + [n]\,dy + [p]\,dp + [q]\,dq + \text{&c.}$$

Maximum minimumve autem esse oportere formulam $\int Z\,dx$, existente: $dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + \text{&c.}$ Jam formula $\int [Z]\,dx$ continetur in Casu secundo §. 7 Cap. præc: inde ergo si capiatur integrale $\int [L]\,dx$ ejusque valor respondens abscissæ $x = a$, ad quam solutio debet accommodari, ponatur $= [H]$, atque $[H] - \int [L]\,dx = [V]$; habebitur formulæ $\int [Z]\,dx$ valor differentialis $= \Pi\nu.\,dx\,([N] + [n][V] - \frac{d([P] + [p][V])}{dx} + \frac{dd([Q] + [q][V])}{dx^2} - \text{&c.})$. Deinde vero maximi minimive formula $\int Z\,dx$ continetur in Casu tertio loci citati; ad ejusque valorem differentialem inveniendum, ponatur formulæ $\int L\,dx$ valor abscissæ $x = a$ respondens $= H$, ac $H - \int L\,dx = V$. Jam capiatur integrale $\int [L]V\,dx = H\int [L]\,dx - \int [L]\,dx \int L\,dx$ sitque, posito $x = a$, valor formulæ $\int [L]\,dx \int L\,dx = K$, eodem autem casu formulæ $\int [L]\,dx$ valor est $= [H]$, ex quo formulæ

$\int [L] V dx$, casu $x = a$, valor erit $= H^{\cdot} H] - K$, & vocetur $H[H] - K - H\int [L] dx + \int [L] dx \int L dx = W$, ita ut sit $IV = H[V] - K + \int [L] dx \int L dx$, eritque formulæ propositæ $\int Z dx$ valor differentialis $=$ n v. $dx (N + [N] V + [n] W - \frac{d.(P+[P]V+[p]W)}{dx} + \frac{dd(Q+[Q]V+[q]W)}{dx^2}$ — &c.). Quod si jam ad hunc valorem differentialem addatur præcedens per quantitatem constantem arbitrariam α multiplicatus, summaque ponatur $= o$, prodibit æquatio pro curva quæsita hæc :

$$o = N + [N](\alpha + V) + [n](\alpha[V] + W) - \frac{1}{dx} \cdot$$
$$d(P + [P](\alpha + V) + [p](\alpha[V] + W) + \frac{1}{dx^2} \cdot$$
$$dd(Q + [Q](\alpha + V) + [q](\alpha[V] + W) - \text{&c.}$$

Est vero hic $\alpha + V = \alpha + H - \int L dx$; unde si ponatur $\alpha + H = C$, erit C constans arbitraria, & $\alpha + V = C - \int L dx$, atque $\alpha[V] + W = C[H] - K - C\int [L] dx + \int [L] dx \int L dx$. Hoc igitur pacto, pervenietur ad curvam quæsitam, in cujus æquatione, quia ob $[H]$ & K adhuc inest constans data a, ea quæsito satisfaciet tantum pro proposita abscissa $x = a$. Quod si autem formularum ambarum altera ad Casum 4, altera ad Casum 5 pertineat, tum iterum consideratio datæ abscissæ a ex calculo egreditur, eademque curva pro omni abscissa satisfaciet, id quod unico sequenti Exemplo declarasse sufficiet.

EXEMPLUM V.

66. *Inter omnes curvas eidem abscissæ respondentes, quæ eundem formulæ* v *valorem recipiunt; invenire eam, in qua sit* $\int \frac{dx\sqrt{(1+nn)}}{vv}$ *maximum vel minimum, existente* $dv = g\,dx + W\,dx\sqrt{(1+pp)}$ *& W functione quacunque ipsius* v.

Solutio hujus Quæstionis exhibebit curvam super quâ corpus descen-

descendens a gravitate uniformi g deorsum, in directione abscissarum sollicitatum in medio quocunque resistente celerrime delabitur, inter omnes alias curvas super quibus descendendo eandem acquirit celeritatem. Est enim $\sqrt{v}$ celeritas corporis in quocunque curvæ puncto, & W exprimit resistentiam medii. Quod nunc primum ad proprietatem communem $v = \int dx(g + W\sqrt{(1+pp)})$; ponamus esse $dW = U\,dv$, atque hæc formula ad Casum quartum pertinebit; erit namque $n = v$, & $Z = g + W\sqrt{(1+pp)}$, ac $dZ = U\,dv\,\sqrt{(1+pp)} + \frac{W\,p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$; unde erit $L = U\sqrt{(1+pp)}$, $M = 0$, $N = 0$, & $P = \frac{W\,p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Sumatur ergo integrale $\int U\,dx\sqrt{(1+pp)}$, sitque, casu quo $x = a$ ponitur, $e^{\int U\,dx\,\sqrt{(1+pp)}} = H$, ac ponatur $V = He^{-\int U\,dx\,\sqrt{(1+pp)}}$. Ex his erit formulæ v valor differentialis $= n\,v.\,dx\left(-\frac{1}{dx}\,d.\,\frac{W\,V\,p}{\sqrt{(1+pp)}}\right) = -n\,v.\,d.\,\frac{W\,V\,p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Porro maximi minimive formula $\int \frac{dx\,\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$ pertinebit ad Casum quintum; eritque $Z = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$, & $dZ = -\frac{dv\,\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} + \frac{p\,dp}{\sqrt{v(1+pp)}}$; ideoque $n = v$, & $L = -\frac{\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$; $M = 0$, $N = 0$, & $P = \frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}}$. Deinde vero, ob $v = \int dx\,(g + W\sqrt{(1+pp)})$, erit $[Z] = g + W\sqrt{(1+pp)}$, & $d[Z] = U\,dv\,\sqrt{(1+pp)} + \frac{W\,p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$; unde $[L] = U\sqrt{(1+pp)}$, $[M] = 0$, $[N] = 0$, & $[P] = \frac{W\,p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Ponatur, si post integrationem fiat $x = a$, $-\int e^{\int U dx \sqrt{(1+pp)}} \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} = K$,

sitque

fitque $e^{-\int U dx \sqrt{(1+pp)}} (K + \int e^{\int U dx \sqrt{(1+pp)}} \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}) = T$:
atque erit formulæ $\int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$ valor differentialis $=$
$nv.dx\,(\frac{1}{dx}\,d(\frac{p}{\sqrt{v}(1+pp)}) + \frac{WTp}{\sqrt{(1+pp)}}) = -nv.d(\frac{p}{\sqrt{v}(1+pp)}$
$+ \frac{WTp}{\sqrt{(1+pp)}})$. Ex his duobus valoribus differentialibus inventis nascitur pro curva quæsita sequens æquatio, $0 = \alpha d. \frac{WVp}{\sqrt{(1+pp)}}$
$+ d(\frac{p}{\sqrt{v}(1+pp)} + \frac{WTp}{\sqrt{(1+pp)}})$, & integrando, $B = \frac{p}{\sqrt{v}(1+pp)}$
$+ \frac{Wp(\alpha V + T)}{\sqrt{(1+pp)}}$. At est $\alpha V + T = e^{-\int U dx \sqrt{(1+pp)}}$
$(\alpha H + K + \int e^{\int U dx \sqrt{(1+pp)}} \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}})$. Quod si ergo ponatur $\alpha H + K = C$, erit C constans arbitraria, atque quantitas definita α omnino ex æquatione evanescet; ideoque curva quæsita desideratam proprietatem pro quavis abscissa possidebit. Pro curva quæsita habebitur ergo ista æquatio:
$e^{\int U dx \sqrt{(1+pp)}} (\frac{B\sqrt{(1+pp)}}{Wp} - \frac{1}{W\sqrt{v}}) = C +$
$\int e^{\int U dx \sqrt{(1+pp)}} \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$, & differentiando $\frac{-B\,dp}{Wp^2\sqrt{(1+pp)}}$
$- \frac{BUdv\sqrt{(1+pp)}}{W^2p} + \frac{Udv}{W^2\sqrt{v}} + \frac{dv}{2Wv\sqrt{v}} + \frac{BUdx(1+pp)}{Wp}$
$- \frac{Udx\sqrt{(1+pp)}}{W\sqrt{v}} = \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$. Cum autem sit $dv = g\,dx + W\,dx\sqrt{(1+pp)}$, habebimus facta substitutione, hanc æquationem $\frac{B\,dp}{Wp^2\sqrt{(+pp)}} = \frac{g\,dx}{2Wv\sqrt{v}} + \frac{gUdx}{W^2\sqrt{v}} -$
$\frac{gBUdx\sqrt{(1+pp)}}{W^2p}$, sive istam $\frac{2BW\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{gWp^2dx}{v\sqrt{v}} +$
$\frac{2gUp^2dx}{\sqrt{v}} - 2gBUp\,dx\sqrt{(1+pp)}$. Multiplicetur hæc æquatio per dv, & in primo termino loco dv scribatur $g\,dx + W\,dx$

$Wdx\sqrt{(1+pp)}$, ac dW loco Udv; quo facto, habebitur ista æquatio $\frac{2gBdp}{W\sqrt{(1+pp)}} + 2Bdp - \frac{gp^2dv}{Wv\sqrt{v}} = \frac{2gppdW}{W^2\sqrt{v}} - \frac{2gBpdW\sqrt{(1+pp)}}{W^2}$; quæ divisa per p^2 fit integralis; eritque æquatio integrata hæc, $2C - \frac{2B}{p} = \frac{2gB\sqrt{(1+pp)}}{Wp} = \frac{2g}{W\sqrt{v}}$, sive $W = \frac{gB\sqrt{v(1+pp)} - gp}{Cp\sqrt{v} - B\sqrt{v}} = \frac{dv - gdx}{dx\sqrt{(1+pp)}}$. Unde nascitur æquatio a resistentia W libera hæc, $(Cp - B)dv = gCpdx + gBppdx - \frac{gpdx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$

Cum autem W sit functio ipsius v data, ope æquationis $W\sqrt{v} = \frac{gB\sqrt{v(1+pp)} - gp}{Cp - B}$, dabitur p per v; qui valor si in præcedente æquatione substituatur, dabitur dx per v & dv; hincque curva quæsita poterit construi.

PROPOSITIO VI. PROBLEMA.

67. Inter omnes curvas proprietate communi A *praditas, determinare eam, in qua sit functio quæcunque, cum ipsius illius expressionis* A, *tum alius cujuscunque* B, *maximum vel minimum.*

SOLUTIO.

Sit dA valor differentialis expressionis A, atque dB valor differentialis expressionis B; habebit functionis illius ipsarum A & B, quam maximum minimumve esse oportet, valor differentialis hujusmodi formam $\alpha dA + \mathfrak{G}dB$; in qua constantes α & $\mathfrak{G}$ a ratione compositionis qua expressiones A & B in illa functione inter se permiscentur pendent; ita ut valores obtineant determinatos ab abscissæ quantitate, cui solutionem accomodatam esse oportet pendentes. Quoniam vero expressionis A, quæ proprietatem communem complectitur, valor differentialis est

dA; hujus multiplum quodcunque γdA addatur ad valorem differentialem $\alpha dA + \mathfrak{G}dB$ expreſſionis, quæ maximum minimumve eſſe debet, ac ſumma $(\alpha + \gamma)dA + \mathfrak{G}dB$ nihilo æqualis poſita dabit æquationem pro curva quæſita. Habebitur igitur iſta æquatio $(\alpha + \gamma)dA + \mathfrak{G}dB = 0$, ſeu $(\alpha + \quad)\ dA + \mathfrak{G}\delta dB = 0$; in qua, etiamſi α & $\mathfrak{G}$ ſint quantitates conſtantes determinatæ, tamen, ob γ & δ quantitates conſtantes arbitrarias, coëfficientes valorum dA & dB, qui ſunt $(\quad + \gamma)\delta$ & $\mathfrak{G}\delta$ evadent conſtantes arbitrariæ magnitudinis. Harum igitur loco ſi ſcribantur litteræ ξ & η, habebitur pro curva quæſita iſta æquatio $\xi dA + \eta dB = 0$. Quo-circa ad Problema ſolvendum, expreſſionum A & B, quarum altera proprietatem communem continet, utriuſque autem functio quæcunque maximum minimumve eſſe debet, ſingulatim valores differentiales dA & dB capi oportet, eoſque, per quantitates conſtantes arbitrarias, quaſque multiplicatos nihilo æquales poni, quo facto reſultabit iſta æquatio $\xi dA + \eta dB = 0$, quæ naturam curvæ quæſitæ exprimet. Q. E. I.

Coroll. I.

68. Natura igitur curvæ ſatisfacientis tantum ab expreſſionibus A & B pendet; neque ratio functionis ipſarum A & B, quæ maximum minimumve eſſe debet, ullo modo in computo manet; ſed quæcunque ſit functio, eadem ſolutio prodibit.

Coroll. II.

69. Quæcunque itaque ipſarum A & B functio, inter omnes curvas eadem proprietate A gaudentes, debeat eſſe maximum vel minimum; ſolutio perinde ſe habebit, ac ſi, inter omnes curvas eadem communi proprietate A gaudentes, ea requiratur, in qua expreſſio altera B maximum minimumve obtineat valorem.

Co-

COROLL. III.

70. Quod ſi ergo expreſſiones A & B ejuſmodi fuerint formulæ, quarum valores differentiales dA & dB non pendeant a magnitudine abſciſſæ x cui reſpondent; quod evenit, ſi illæ formulæ pertineant ad Caſum vel primum vel quartum, ſecundum noſtram enumerationem Capite præcedente §. 7 factam, tum curva inventa pro quacunque abſciſſa æque ſatisfaciet.

COROLL. IV.

71. Eadem Solutio locum habebit ſi, inter omnes curvas quarum communis ſit proprietas functio quæcunque ipſarum A & B, ea requiratur in qua alia quæpiam earundem A & B functio ſit maximum vel minimum. Hoc enim quoque caſu pervenitur ad æquationem $\xi dA + \eta dB = 0$, in qua ξ & η ſint quantitates conſtantes ad arbitrium accipiendæ.

EXEMPLUM I.

72. *Inter omnes curvas* a M b *cum axe* A B *eandem aream* $\int y\,dx$ *continentes, invenire eam in qua ſit* $\frac{\int yy\,dx}{\int y\,dx}$ *minimum.* Fig. 20.

Quæſtio hæc initur, ſi inter omnes areas æquales quæ intra ordinatas extremas A a & B b atque baſi A B formari poſſunt, deſideretur ea, quæ habeat ſuum centrum gravitatis in loco infimo poſitum. Sumpta enim curva quacunque a M b, poſitiſque abſciſſa $AP = x$, applicata $PM = y$, erit portionis a A P M centrum gravitatis a baſi A P remotum intervallo $= \frac{\int v\eta\,dx}{2\int y\,dx}$; quod adeo fiet minimum, ſi reddatur hæc expreſſio $\frac{\int yy\,dx}{\int y\,dx}$ minima. Habemus ergo binas has formulas $\int y\,dx$ & $\int yy\,dx$, quarum valores differentiales ſunt $n\nu.\,dx.\,1$ & $n\nu.\,dx.\,2y$, ex

quibus pro curva quæſita iſta colligitur æquatio $\xi + z\,y = 0$; ſeu $y = c$. Quæſtioni igitur ſatisfacit linea recta αC baſi AB parallela ſeu horizontalis, atque parallelogrammum rectangulum $A\alpha CB$, præ omnibus aliis figuris ut $AabB$ ejuſdem areæ, hac gaudebit prærogativa, ut ejus centrum gravitatis ad baſin AB proxime accedat. Quod ſi ergo αABC concipiatur tanquam vas aqua repletum, ſi ſuprema aquæ ſuperficies αC ſeſe ad ſitum horizontalem compoſuerit, tum aqua habebit ſuum centrum gravitatis profundius ſitum, quam ſi ejus ſuprema ſuperficies alium quemcunque ſitum teneret.

EXEMPLUM II.

Fig. 14. 73. *Inter omnes curvas ejuſdem longitudinis* DAD, *invenire eam quæ habeat ſuum gravitatis centrum quam profundiſſime ſitum, ſeu in qua ſit* $\frac{\int x\,dx\sqrt{(1+pp)}}{\int dx\sqrt{(1+pp)}}$ *minimum.*

Jam intelligitur Solutio hujus Quæſtionis datura eſſe curvam Catenariam; namque ſecundum leges Staticas catena ex punctis D & D ſuſpenſa ejuſmodi induet figuram ut ejus centrum gravitatis maxime deſcendat. Quamobrem inter omnes figuras, quas catena inducere poteſt, quæ quidem omnes ejuſdem ſunt longitudinis, curva Catenaria orietur, ſi quæratur ea, in qua ſit $\frac{\int x\,dx\sqrt{(1+pp)}}{\int dx\sqrt{(1+pp)}}$ minimum; quippe quæ expreſſio dat diſtantiam centri gravitatis G ab abſciſſarum initio A. Cum igitur habeantur binæ iſtæ formulæ $\int dx\sqrt{(1+pp)}$, & $\int x\,dx\sqrt{(1+pp)}$; quærantur earum valores differentiales; qui erunt, primæ $= -$ $n\,v.\,d.\,\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, & alterius $= -$ $n\,v.\,d.\,\frac{xp}{\sqrt{(1+pp)}}$, ex quibus naſcitur pro curva quæſita iſta æquatio $c\,d.\,\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = d.\,\frac{xp}{\sqrt{(1+pp)}}$, & integrando $\frac{xp}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{cp}{\sqrt{(1+pp)}} +$

$+b$, seu $x-c=\frac{b\sqrt{(1+pp)}}{p}$, & $dx=\frac{-b\,dp}{pp\sqrt{(1+pp)}}$. Hinc ergo fiet $y=\int p\,dx=-b\int\frac{dp}{p\sqrt{(1+pp)}}$; ex quibus æquationibus curva constructur, eritque curvæ longitudo $\int dx\sqrt{(1+pp)}=s=\frac{b}{p}+Const.=\frac{b}{p}+f$. Hinc alia Constructio, definiendis x & y per s formari poterit: erit nempe $p=\frac{b}{s-f}$ &, si initium capiatur in A, ubi fit $p=\infty$, ponendum est $f=0$, ita ut fit $p=\frac{b}{s}$; unde fit $\sqrt{(1+pp)}=\frac{\sqrt{(bb+ss)}}{s}$ & $dx\sqrt{(1+pp)}=ds=\frac{dx\sqrt{(bb+ss)}}{s}$; hincque $dx=\frac{s\,ds}{\sqrt{(bb+ss)}}$, & $x=\sqrt{(bb+ss)}-b$. Porro erit $dy=p\,dx=\frac{b\,ds}{\sqrt{(bb+ss)}}$, atque $y=b\,l\,\frac{s+\sqrt{(bb+ss)}}{b}$. Æquatio autem inter coordinatas orthogonales x & y deducetur ex æquatione $x-c=\frac{b\sqrt{(1+pp)}}{p}$; quæ si desideretur super axe AP, qui est diameter, & pro initio abscissarum in A sumpto, ubi est $p=\infty$, poni oportet $c=-b$; eritque $(x+b)p=b\sqrt{(1+pp)}$, hincque $(x+b)^2pp=bb+bbpp$, & $p=\frac{b}{\sqrt{(xx+2bx)}}$; ideoque $dy=\frac{b\,dx}{\sqrt{(xx+2bx)}}$, quæ est æquatio pro Catenaria nota.

EXEMPLUM III.

74. *Inter omnes curvas ejusdem longitudinis, determinare eam in qua sit* $\frac{\int S\,x\,dx\sqrt{(1+pp)}}{\int S\,dx\sqrt{(1+pp)}}$ *minimum; denotante* S *functionem quamcunque arcus curvæ* $s=\int dx\sqrt{(1+pp)}$.

In hoc Exemplo continetur inventio curvæ Catenariæ, si catena non fuerit ubique uniformiter crassa, sed cujus crassities ar-

cui s respondens est ut S functio ipsius s. Tum enim exprimet $\int S dx \sqrt{(1+pp)}$ hujus catenæ pondus, & $\frac{\int Sxdx\sqrt{(1+pp)}}{\int Sdx\sqrt{(1+pp)}}$ altitudinem centri gravitatis supra abscissarum initium; quæ esse debet minima. Principio quidem hic casus in Problemate præcedente non contineri videtur, quia formula arcum exprimens ipsa $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ non ineſt in maximi minimive expressione $\frac{\int Sxdx\sqrt{(1+pp)}}{\int Sdx\sqrt{(1+pp)}}$, quippe quæ est functio duarum aliarum formularum integralium. At cum sit S functio arcus curvæ s, atque $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$, erit $\int Sdx\sqrt{(1+pp)} = \int Sds$, ideoque functio ipsius s: ex quo expressio $\frac{\int Sxdx\sqrt{(1+pp)}}{\int Sdx\sqrt{(1+pp)}}$, erit functio formularum $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ & $\int Sxdx\sqrt{(1+pp)}$, quarum illa proprietatem communem continet. Idem igitur est ac si quærere deberemus inter omnes curvas æque longas eam in qua sit $\int Sxdx\sqrt{(1+pp)}$ minimum. Cum jam S sit functio ipsius $s = \int dx\sqrt{(1+pp)}$, pertinebit hæc Quæstio ad Propositionem præcedentem, eumque casum qui §. 60 est pertractatus. Scilicet erit $Z = Sx\sqrt{(1+pp)}$; unde, si ponamus $dS = Tds$, fiet $dZ = xTds\sqrt{(1+pp)} + Sdx\sqrt{(1+pp)} + \frac{Sxpdx}{\sqrt{(1+pp)}}$, ita ut sit $L = xT\sqrt{(1+pp)}$; $M = S\sqrt{(1+pp)}$, $N = 0$ & $P = \frac{Sxp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Jam ob $N = 0$, obtinemus ex eodem loco citato statim hanc æquationem . . . . . $A + \frac{(C - \int xTdx\sqrt{(1+pp)})p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{-Sxp}{\sqrt{(1+pp)}}$, seu $\frac{A\sqrt{(1+pp)}}{p} + C - \int xTdx\sqrt{(1+pp)} + Sx = 0$. At est $Tdx\sqrt{(1+pp)} = Tds = dS$; unde habetur $\frac{A\sqrt{(1+pp)}}{p} + C + Sx - \int xdS = 0$, ubi A & C sunt quantitates arbitrariæ. Differentietur hæc æquatio, fietque $\frac{-Adp}{pp\sqrt{(1+pp)}} + Sdx = 0$, seu $Sdx\sqrt{(1+pp)} = -\frac{cdp}{pp} = Sds$. Quare cum sit S functio ipsius

ipſius s, integretur Sds, eritque integrale, quod ſit $= R$, pondus catenæ longitudini s reſpondens. Fiet ergo integrando $\frac{c}{p} = R + C$; &, ſi initium curvæ capere placeat in loco A, ubi curvæ tangens eſt horizontalis, erit $C = 0$, atque $p = \frac{c}{R}$. Hinc ergo porro erit $\sqrt{(1+pp)} = \frac{\sqrt{(cc+RR)}}{R} = \frac{ds}{dx}$; ideoque $dx = \frac{R\,ds}{\sqrt{(cc+RR)}}$, atque $dy = \frac{c\,ds}{\sqrt{(cc+RR)}}$, ex quibus æquationibus curva ita poterit conſtrui, ut ſtatim ad quamvis catenæ longitudinem tam abſciſſa quam applicata reſpondens definiatur. Manifeſtum autem eſt caſu quo $R = s$, hoc eſt quo catena ponitur uniformis craſſitiei, tum prodire Catenariam curvam ordinariam.

SCHOLION.

75. Niſi hujus Exempli convenientia, tam cum iſta Propoſitione quam cum præcedente, eſſet obſervata, tum Solutio quidem per regulam generalem abſolvi potuiſſet: verum tamen multo prolixior evaſiſſet. Quo autem nihilominus Methodi generalis uſus clarius ob oculos ponatur, idem hoc Exemplum ſecundum generalia præcepta reſolvere viſum eſt. Quæratur igitur inter omnes curvas ejuſdem longitudinis $s = \int dx\sqrt{(1+pp)}$, ea quæ habeat valorem expreſſionis hujus $\frac{\int S\,x\,dx\sqrt{(1+pp)}}{\int S\,dx\sqrt{(1+pp)}}$ maximum vel minimum; exiſtente S functione quacunque arcus curvæ s. Et quoniam nondum ſuſpicari licet conſiderationem datæ abſciſſæ, a qua valor differentialis expreſſionis $\frac{\int Sxdx\sqrt{(1+pp)}}{\int Sdx\sqrt{(1+pp)}}$ pendet, ex calculo eſſe egreſſuram; ponamus huic Quæſtioni tantum pro data abſciſſæ longitudine $x = a$ ſatisfieri oportere. Ab hac longitudine quidem formulæ communem proprietatem continentis $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ valor differentialis non pendet, quippe

quippe qui constanter est $= -nv.d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$; at in maximi minimive expressione $\frac{\int Sxdx\sqrt{(1+pp)}}{\int Sdx\sqrt{(1+pp)}}$ ponamus, casu quo $x=a$, fore $\int Sxdx\sqrt{(1+pp)}=A$ & $\int Sdx\sqrt{(1+pp)}=B$: illius vero numeratoris $\int Sxdx\sqrt{(1+pp)}$ valorem differentialem esse $=dA$, denominatoris vero $\int Sdx\sqrt{(1+pp)}$ valorem differentialem esse $=dB$. Hinc igitur maximi minimive expressionis, qnæ, casu $x=a$, fit $=\frac{A}{B}$, valor differentialis erit $-\frac{BdA-AdB}{BB}$, qui multiplo cuicunque formulæ communis valoris differentialis $-nv.d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ æqualis positus dabit æquationem pro curva quæsita. Jam ad valores differentiales dA & dB inveniendos, considerabimus primum formulam $\int Sdx\sqrt{(1+pp)}$, quæ secundum enumerationem §. 7 Cap. præced. factam, pertinet ad Casum secundum: quo erit $Z=S\sqrt{(1+pp)}$, & posito $dS=Tds$, erit $dZ=Tds\sqrt{(1+pp)}+\frac{Spdp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Comparatione ergo facta, erit $\Pi=s$; $L=T\sqrt{(1+pp)}$, $M=0$, $N=0$, & $P=\frac{Sp}{\sqrt{(1+pp)}}$: tum vero ob $\Pi=s=\int dx\sqrt{(1+pp)}$, erit $[Z]=\sqrt{(1+pp)}$ & $[M]=0$, $[N]=0$, & $[P]=\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Jam sumatur integrale $\int Ldx=\int Tdx\sqrt{(1+pp)}=\int Tds=S$, cujus valor, casu $x=a$, fiat $=G$, eritque $V=G-S$. Quamobrem habebitur formulæ $\int Sdx\sqrt{(1+pp)}$ valor differentialis $dB=-nv.d(\frac{Sp}{\sqrt{(1+pp)}}+\frac{p(G-S)}{\sqrt{(1+pp)}})=-nv.d.\frac{Gp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Altera porro formula $\int Sxdx\sqrt{(1+pp)}$ pariter in eodem Casu secundo comprehenditur, eritque $Z=Sx\sqrt{(1+pp)}$ & $dZ=Txds\sqrt{(1+pp)}+Sdx\sqrt{(1+pp)}+\frac{Sxpdp}{\sqrt{(1+pp)}}$ unde fit $\Pi=s$; $L=Tx\sqrt{(1+pp)}$; $M=S\sqrt{(1+pp)}$; $N=0$

$N = 0$ & $P = \frac{Sxp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Deinde, ob $\pi = s = \int dx\sqrt{(1+pp)}$, erit, ut ante, $[Z] = \sqrt{(1+pp)}$, $[M] = 0$, $[N] = 0$, & $[P] = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Nunc fumatur integrale $\int L\,dx =$ $\int T x\,dx\sqrt{(1+pp)} = \int T x\,ds = \int x\,dS$, cujus valor, posito $x = a$, fit $= H$; erit $V = H - \int x\,dS$, hincque prodibit iſtius formulæ valor differentialis $dA =$ . . . . . $- nv.d\left(\frac{Sxp + p(H - \int x dS)}{\sqrt{(1+pp)}}\right) = - nv.d.\frac{p(H + \int S\,dx)}{\sqrt{(1+pp)}}$. Inventis ergo valoribus dA & dB, æquatio pro curva quæſita erit $\alpha B^2 d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} - \mathfrak{C} A d.\frac{Gp}{\sqrt{(1+pp)}} + \mathfrak{C} B d.\frac{p(H+\int S dx)}{\sqrt{(1+pp)}} = 0$, & integrando $\frac{\alpha B^2 n - \mathfrak{C} AGp + \mathfrak{C} BHp + \mathfrak{C} Bp\int S\,dx}{\sqrt{(1+pp)}} = C$; in qua α, $\mathfrak{C}$, & C ſunt conſtantes arbitrariæ, & G & H conſtantes determinatæ. Quod ſi ergo ponatur $\frac{\alpha B}{\mathfrak{C}} + \frac{AG}{B} + H = b$ & $\frac{C}{\mathfrak{C} B} = c$, erunt b & c conſtantes arbitrariæ, atque conſtantes determinatæ G & H a definito abſciſſæ valore $x = a$ pendentes omnino ex æquatione evaneſcent; ita ut Curva inventa pro quavis abſciſſa gaviſura ſit deſiderata proprietate: ejuſque æquatio erit hæc $c = \frac{bp + p\int S\,dx}{\sqrt{(1+pp)}}$, ſeu $\frac{c\sqrt{(1+pp)}}{p} = b + \int S\,dx$; quæ differentiata dabit $S\,dx = -\frac{c\,dp}{pp\sqrt{(1+pp)}}$, ſeu $Sdx\sqrt{(1+pp)} = Sds = -\frac{c\,dp}{pp}$. Ponatur, ut ſupra, $\int S\,ds = R$, ita ut R pondus longitudinis catenæ s repræſentet, erit $R = \frac{c}{p} + Conſt.$ quæ eſt ipſa æquatio, quam præcedenti Methodo elicuimus. Ex hac itaque ſolutione intelligitur, quemadmodum per Methodum generalem hujuſmodi Quæſtiones reſolvi poſſint, ſi proprietas communis non ingrediatur in maximi minimive expreſſionem; quod ut clarius intelligatur unum adhuc hujuſmodi Exemplum appoſuiſſe ſufficiet.

EXEMPLUM IV.

Fig. 24. 76. *Inter omnes curvas ejuſdem longitudinis* DAD *data abſciſſæ* AC = a *reſpondentes, eam definire quæ comprehendat aream* DAD, *cujus centrum gravitatis* G *ſit vel altiſſime vel profundiſſime poſitum, ſeu in qua ſit* $\frac{\int y x dx}{\int y dx}$ *maximum vel minimum.*

Proprietas igitur communis eſt $\int dx \sqrt{(1+pp)}$, cujus valor differentialis cuicunque abſciſſæ x reſpondens eſt $= \frac{n\nu.\, d.\, p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Maximi autem minimive expreſſionis $\frac{\int y x dx}{\int y dx}$ valor differentialis pendebit a præſcripta abſciſſæ longitudine $x = a$; qui ut inveniatur; caſu quo $x = a$, fiat $\int y x dx = A$, hujuſque formulæ valor differentialis ſit $= dA$, qui per Regulas ſupra datas invenitur $= n\nu.\, dx.\, x = n\nu.\, x dx$. Porro, eodem caſu $x = a$, abeat altera formula $\int y dx$ in B, ſitque ejus valor differentialis $= dB$, qui per Regulas datas reperitur $= n\nu.\, dx$; ita ut ſit $dA = n\nu.\, x dx$ & $dB = n\nu.\, dx$. Ex his, maximi minimive expreſſionis $\frac{\int y x dx}{\int y dx}$, quæ, caſu $x = a$, abit in $\frac{A}{B}$, valor differentialis erit $= \frac{B dA - A dB}{BB} = \frac{n\nu\,(B x dx - A dx)}{BB}$, qui multiplo valoris differentialis $n\nu.\, d.\, \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, qui ex proprietate communi prodiit, æqualis poſitus dabit pro curva quæſita iſtam æquationem $a\, d.\, \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{B x dx - A dx}{BB}$. Sit $\frac{A}{B} = b$, erit b quantitas conſtans determinata, quam præbet formula $\frac{\int y x dx}{\int y dx}$, ſi ponatur $x = a$, & aB ponatur $= cc$, erit cc quantitas arbitraria. Hinc habebitur iſta pro curva æquatio $cc\, d.\, \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = x dx - b dx$, quæ

Digitized by Google

quæ integrata dat $\frac{2ccp}{\sqrt{(1+pp)}} = xx - 2bx + bb$; ergo $4c^4pp = (xx-2bx+bb)^2(1+pp)$, atque $p = \frac{xx-2bx+bb}{\sqrt{(4c^4-(xx-2bx+bb)^2)}} = \frac{dy}{dx}$. Quocirca erit $y = \int \frac{(xx-2bx+bb)\,dx}{\sqrt{(4c^4-(xx-2bx+bb)^2)}}$, ubi conſtantem bb, pro arbitrio, ſive affirmativam, ſive negativam accipere licet. Hæc autem curva Quæſtioni ſatisfacit tantum caſu, quo $x = a$; atque ut ſatisfaciat litteræ b is tribui debet valor quem, caſu $x = a$, recipiet expreſſio $\frac{\int y\,x\,dx}{\int y\,dx}$, ex quo valor b determinabitur. Cæterum notari convenit hanc curvam eſſe eam quæ vulgo ſub nomine Elaſticæ eſt cognita.

CAPUT VI.

Methodus, inter omnes curvas pluribus proprietatibus communibus gaudentes, eam determinandi quæ maximi minimive proprietate ſit prædita.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

1. *Curva, quæ inter omnes omnino curvas habet expreſſionem* $\alpha A + \mathfrak{G}B$ *maximum vel minimum, eadem ſimul ita erit comparata, ut inter omnes eadem proprietate* A *præditas contineat valorem formulæ* B *maximum vel minimum.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus inventam eſſe curvam, in qua inter omnes alias eidem abſciſſæ reſpondentes valor expreſſionis $\alpha A + \mathfrak{G}B$ ſit maximus; quod enim de maximo demonſtrabitur, idem mutatis mutandis de minimo valebit. Denotant autem litteræ A & B hic nobis ejuſmodi formulæ vel expreſſiones indeterminatæ, in quas Quæſtio de maximis & minimis cadere queat; tum vero

α & ζ sunt quantitates constantes quæcunque. Designemus jam istam curvam, in qua sit $\alpha A + \zeta B$ maximum, littera Q, quo eam facilius sine molesta verborum descriptione indicare queamus; Nunc concipiatur alia quæcunque curva R eidem abscissæ respondens, quæ recipiat formulæ A eundem valorem, quem tenet curva Q: in hac igitur curva R expressio $\alpha A + \zeta B$ minorem occupabit valorem, quam in curva Q; eo quod in curva Q expressio $\alpha A + \zeta B$ omnium maximum valorem sortitur. Quare cum in curvis Q & R expressio A eundem obtineat valorem, atque in Q expressio $\alpha A + \zeta B$ major sit quam in curva R; sequitur in curva Q valorem expressionis B majorem esse debere quam in curva R. Cum igitur R curvam quamcunque denotet, quæ cum Q communem valorem formulæ A recipiat; manifestum est inter omnes has curvas R curvam Q esse illam, in qua formula B maximum habeat valorem. Ex quibus conficitur, eam curvam, quæ inter omnes omnino curvas habeat expressionis $\alpha A + \zeta B$ valorem maximum vel minimum, eandem curvam simul ita esse comparatam, ut inter omnes alias curvas secum eadem communi proprietate A gaudentes possideat maximum minimumve valorem expressionis B. Quanquam enim Demonstratio tantum ad maximum est adornata, tamen eadem, translatis verbis, ad minimum accommodabitur. Q. E. D.

Coroll. I.

2. Vicissim itaque intelligitur, si curva debeat investigari, quæ inter omnes alias eadem communi proprietate A præditas expressionem B sit habitura maximum vel minimum; tum quæsito satisfieri, si absolute inter omnes curvas ea definiatur, in qua sit $\alpha A + \zeta B$ maximum vel minimum.

Coroll. II.

3. In solutionem igitur hujusmodi Problematum binæ novæ ingrediuntur constantes arbitrariæ α & ζ, quæ in ipsis expressionibus

nibus *A* & *B* non inerant: hæ autem unius dumtaxat conſtantis vicem ſuſtinebunt; quia earum ratio tantum in computum venit.

COROLL. III.

4. Quod ſi ergo, inter omnes curvas eadem communi proprietate *A* gaudentes, eam definiri oporteat in qua ſit *B* maximum minimumve; tum utriuſque expreſſionis *A* & *B* capiantur valores differentiales, qui, per conſtantes arbitrarias ſeorſim multiplicati & conjunctim nihilo æquales poſiti, dabunt æquationem pro curva quæſita.

COROLL. IV.

5. Simul etiam perſpicuum eſt perinde eſſe, ſive inter omnes curvas eadem communi proprietate *A* gaudentes, ea quæratur in qua ſit *B* maximum vel minimum; ſive viciſſim inter omnes curvas eadem communi proprietate *B* gaudentes, ea quæratur in qua ſit *A* maximum vel minimum.

SCHOLION.

6. Quæ, cum in hac Propoſitione, tum in annexis Corollariis, tradidimus, ex Capite præcedente jam ſunt planiſſima: quippe quibus continetur inverſa Methodus reſolvendi Problemata, in quibus, inter omnes curvas eadem communi proprietate gaudentes, ea quæritur quæ prædita ſit maximi minimive alicujus indole. Neque vero idcirco idem argumentum nos tantum repetiviſſe cenſendum eſt; nam eandem veritatem, quam ante modo ſatis prolixo elicueramus, hîc admodum ſuccincte & breviter dedimus demonſtratam. Quocirca eo fortius altera demonſtrandi Methodus per alteram confirmabitur, ob ſummum utriuſque conſenſum: atque ſi cui prior Methodus non ſatis perſpecta, propter tantam infinite parvorum compagem, nimis lubrica & incerta videatur, ei Demonſtratio huc data om-

nem ſcrupulum adimet. Deinde, ſi quis de præſentis Propoſitionis converſione in Coroll. 1 facta etiamnum dubitet, ei prior Methodus pleniſſime ſatisfaciet. Interim ratio converſionis ex ſe ſatis tuto inferri poteſt. Cum enim curva Q, quæ inter omnes omnino curvas habeat $\alpha A + \zeta B$ maximum vel minimum, ita ſit comparata, ut inter omnes curvas eadem communi proprietate A gaudentes, habeat B maximum vel minimum, quicquid loco α & ζ accipiatur; neceſſe eſt ut converſio æque pateat, ſiquidem coëfficientibus α & ζ ſumma extenſio tribuatur. Hocque adeo commemorare, hujuſque ratiocinii validitatem declarare viſum eſt, ut in ſequentibus, ubi eodem utemur, nullum dubium relinquatur. Hanc enim Propoſitionem, etſi proprie ad Caput præcedens pertinet, huc tranſtulimus, quo eâdem Methodo proprium hujus Capitis argumentum facilius pertractare poſſimus; quippe quod, ſi altera Methodo expediri deberet, prolixiſſimos requireret calculos, maximaſque differentialium omnium ordinum tricas. Interim tamen, quantum fieri poteſt, dilucide oſtendemus omnia, quæ hic trademus, per Methodum ſuperiorem confirmari atque etiam elici poſſe.

PROPOSITIO II. THEOREMA.

7. *Quæ curva, inter omnes omnino curvas eidem abſciſſæ reſpondentes, habet valorem expreſſionis* $\alpha A + \zeta B + \gamma C$ *maximum vel minimum, eadem curva ſimul ita erit comparata, ut inter omnes curvas, quæ tam expreſſionem* A *quam expreſſionem* B *communem habent, poſſideat valorem expreſſionis* C *maximum vel minimum.*

DEMONSTRATIO.

Denotant hîc nobis litteræ A, B & C formulas integrales vel expreſſiones indefinitas ejuſmodi, quæ maximi minimive ſint capaces; at litteræ α, ζ, γ deſignant quantitates conſtantes arbitrarias. Sit nunc Q curva, quæ inter omnes omnino curvas habeat

habeat valorem $\alpha A + \beta B + \gamma C$ maximum vel minimum; atque concipiatur alia quæcunque curva R, in qua, cum expreſſio A, tum B, eundem obtineat valorem quem obtinet in curva Q; quo poſito expreſſio compoſita $\alpha A + \beta B$ eundem habebit valorem in utraque curva Q & R. Hanc ob rem, expreſſio tota $\alpha A + \beta B + \gamma C$ in curva R minorem ſortietur valorem quam in curva Q, ſiquidem $\alpha A + \beta B + \gamma C$ in curva Q eſt maximum; contra expreſſionis $\alpha A + \beta B + \gamma C$ valor in curva R major erit quam in curva Q, ſi $\alpha A + \beta B + \gamma C$ in curva Q fuerit minimum. Cum igitur expreſſionis portio $\alpha A + \beta B$ utrique curvæ Q & R ſit communis, reliqua portio γC, atque adeo expreſſio C, in caſu maximi major erit in Q quam in R, in caſu minimi autem expreſſio C in curva Q minor erit quam in curva R. Ex quibus ſequitur, ſi curva Q inter omnes omnino curvas, habuerit valorem expreſſionis $\alpha A + \beta B + \gamma C$ maximum vel minimum, tum ſimul hanc curvam Q ea indole eſſe præditam, ut inter omnes curvas R quæ eodem valore cum expreſſionis A tum expreſſionis B gaudeant, contineat valorem expreſſionis C maximum vel minimum. Q. E. D.

Coroll. I.

8. Quoniam expreſſiones A, B & C pro lubitu inter ſe commutari poſſunt; curva in qua eſt $\alpha A + \beta B + \gamma C$ maximum vel minimum, ea ſimul vel, inter omnes curvas iiſdem proprietatibus A & B communibus gaudentes, habebit C maximum vel minimum; vel habebit B maximum minimumve, inter omnes curvas quæ proprietatibus A & C communibus gaudebunt; vel denique habebit A maximum minimumve, inter omnes curvas in quas ambæ proprietates B & C æque competunt.

Coroll. II.

9. Quæ igitur curva, inter omnes iiſdem binis proprietatibus A & B communibus gaudentes, habet C maximum minimum-

mumve; eadem habebit inter omnes curvas binis proprietatibus vel A & C, vel B & C, æque prædítas, vel B, vel A maximum minimumve.

Coroll. III.

10. Si igitur curva quæri debeat quæ, inter omnes alias binis proprietatis A & B æqualiter prædítas, habeat expreſſionem C maximam vel minimam; tum quæſito ſatisfiet, ſi curva quæratur, quæ, abſolute inter omnes curvas, habeat expreſſionem $\alpha A + \beta B + \gamma C$ maximum vel minimum.

Coroll. IV.

11. Quoniam α, β, γ ſunt quantitates conſtantes arbitrariæ; in ſolutionem hujuſmodi Problematum tres novæ quantitates arbitrariæ ingrediuntur, quæ in formulis propoſitis A, B, & C non inerant: æquivalebunt autem hæ tres conſtantes α, β, & γ tantum duabus.

Coroll. V.

12. Hæ vero conſtantes adeo jam in æquatione pro curva primum inventa inerant; præter eas vero, per integrationes novæ ingredientur conſtantes tot, quot integrationibus opus eſt, antequam ad æquationem finitam perveniatur.

Coroll. VI.

13. Simili modo, quo hanc Propoſitionem & præcedentem demonſtravimus, oſtenderur, curvam, quæ abſolute, inter omnes curvas, habeat expreſſionem $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ maximam vel minimam, eandem, inter omnes curvas tres expreſſiones A, B & C communes habentes, habituram eſſe quartam D maximam vel minimam.

SCHO-

SCHOLION.

14. Ex hac Propoſitione jam ſatis percipitur Methodus reſolvendi ejuſmodi Problemata ad Methodum relativam pertinentia, in quibus quæritur curva quæ, inter omnes eidem abſciſſæ reſpondentes & duabus pluribuſve proprietatibus communibus æque gaudentes, habeat valorem cujuſpiam expreſſionis maximum minimumve. Quæſtio ſcilicet perpetuo revocabitur ad Methodum abſolutam; ita ut, inter omnes omnino curvas, quærenda ſit curva quæ expreſſionem quampiam habeat maximam vel minimam. Hacque reductione id commodi nanciſcimur, ut omnia hujuſmodi Problemata, ope valorum differentialium quos jam ſupra inveſtigare docuimus, reſolvere queamus. Ipſe autem reſolvendi modus eo redibit, ut omnes proprietates communes, una cum maximi minimive expreſſione, ſeorſim explicentur; ſingulæ per conſtantes arbitrarias multiplicentur; & producta in unam ſummam colligantur: quo facto, abſolute inter omnes curvas, eam quæri oportebit, in qua iſta ſumma ſit maxima vel minima. Hoc vero ipſum perficietur, dum ſummæ illius valor differentialis inveſtigabitur, nihiloque æqualis ponetur. Quocirca univerſa operatio abſolvetur, ſi, cum ſingularum expreſſionum proprietates communes continentium, tum maximi minimive expreſſionis valores differentiales, ſecundum regulas ſupra datas, capiantur; ſinguli ſeorſim in conſtantes arbitrarias ducantur; omniumque horum productorum aggregatum nihilo æquale ponatur: ex quo orietur æquatio pro curva quæſita. Sufficere itaque poſſet hoc unicum præceptum ad Quæſtiones hujus generis ſolvendas. Verum, antequam hujus uſum exponamus, hanc ipſam Methodum via ante adhibita confirmari conveniet.

PROPOSITIO III. PROBLEMA.

15. *Inter omnes curvas ad eandem abſciſſam relatas, quæ binis proprietatibus communibus* A *&* B *æqualiter ſint præditæ; definire eam, in qua ſit valor expreſſionis* C *maximus vel minimus.*

SOLUTIO.

Ex præcedentibus jam intelligitur hoc Problema ſolvi, ſi, inter omnes curvas, abſolute quæratur ea in qua ſit $\alpha A + \beta B + \gamma C$ maximum vel minimum. Ad hoc autem noſſe oportet valores differentiales expreſſionum A, B, & C. Sit igitur valor differentialis expreſſionis $A = n\nu . dx . P$; expreſſionis $B = n\nu . dx . Q$; expreſſionis $C = n\nu . dx . R$; ex quibus æquatio pro curva deſiderata erit $\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0$.

Verum, quo hujus Solutionis veritas magis eluceat, idem hoc Problema eadem Methodo, qua ſupra in Capite præced. uſi
Fig. 15. ſumus, aggrediamur. Primum autem intelligitur, ad hoc Problema reſolvendum, ternas applicatas particulis infinite parvis augeri debere, ut tribus conditionibus præſcriptis ſatisfieri poſſit. Primo enim tres has particulas adjunctas, quibus ipſa curva ſatisfaciens az in novam a ſe quam-minime diſcrepantem transmutatur, ita comparatas eſſe oportet, ut expreſſio A, quæ unam proprietatem communem continet, in utramque curvam æqualiter competat: Deinde etiam altera proprietas communis B in utraque curva eundem valorem obtinere debebit. Tertio ex maximi minimive natura expreſſio quoque C eundem valorem in ipſa curva & eadem mutata nanciſci debet; quibus tribus conditionibus, per pauciores quam tres particulas tribus applicatis adjunctas, ſatisfieri non poteſt. Quare præter binas applicatas Nn & Oo, quæ in figura particulis $n\nu$ & $o\omega$ ſunt auctæ, concipiatur ſequenti applicatæ Pp particula $p\pi$ adjici. Ac quæratur primum incrementum, quod expreſſio A ex his tribus particulis aſſequitur quod erit $= n\nu . P dx + o\omega . P' dx + p\pi . P'' dx$. Namque ex particula $n\nu$ naſcitur incrementum $n\nu . P dx$, congruens cum ipſo valore differentiali, quem expreſſio A ex ſola particula $n\nu$ adipiſcitur. Ex ſequenti vero particula $o\omega$ oritur incrementum $o\omega . P' dx$, ſcilicet, idem quod ante, ſuo differentiali auctum: quia enim $o\omega$ ſequenti applicatæ adjungitur, omnes quantitates $o\omega$ afficientes erunt ſequentes earum, quibus particula $n\nu$ afficitur: atque ſimili ratione ex particula $p\pi$ naſcetur incre-

incrementum $p\pi . P''dx$; quæ omnia, ſi cui libuerit calculum eo modo quo in Cap. præc. Propoſ. 3 §. 22 uſi ſumus perſequi, ſatisfient manifeſta ac perſpicua. Eodem igitur porro modo expreſſio B, cujus valorem differentialem ex unica particula $n\nu$ oriundum poſuimus $= n\nu . Qdx$, ex tribus particulis $n\nu$, $o\omega$ & $p\pi$ incrementum accipiet $= n\nu . Qdx + o\omega . Q'dx + p\pi . Q''dx$. Tertio expreſſio C ex his tribus particulis augmentum capiet hoc $n\nu . Rdx + o\omega . R'dx + p\pi . R''dx$. Singula jam hæc tria incrementa ſeorſim nihilo æqualia poni oportet, ut omnibus conditionibus præſcriptis ſatisfiat; unde tres ſequentes æquationes orientur, facta diviſione per dx,

$$\begin{aligned} o &= n\nu . P + o\omega . P' + p\pi . P'' \\ o &= n\nu . Q + o\omega . Q' + p\pi . Q'' \\ o &= n\nu . R + o\omega . R' + p\pi . R'' \end{aligned}$$

Quod ſi nunc particulæ $n\nu$, $o\omega$, $p\pi$, ad ſolutionem peragendam tantum in ſubſidium vocatæ eliminentur; orietur æquatio inter quantitates curvæ proprias, quibus proin natura curvæ exprimetur. Ad has autem particulas eliminandas, ſingulas æquationes per novas incognitas α, ζ, γ, ſeorſim multiplicemus, ut habeatur

$$\begin{aligned} o &= n\nu . \alpha P + o\omega . \alpha P' + p\pi . \alpha P'' \\ o &= n\nu . \zeta Q + o\omega . \zeta Q' + p\pi . \zeta Q'' \\ o &= n\nu . \gamma R + o\omega . \gamma R' + p\pi . \gamma R'', \end{aligned}$$

atque formentur hinc iſtæ æquationes,

$$\begin{aligned} o &= \alpha P + \zeta Q + \gamma R \\ o &= \alpha P' + \zeta Q' + \gamma R' \\ o &= \alpha P'' + \zeta Q'' + \gamma R''. \end{aligned}$$

Hic ſtatim patet, ſi pro α, ζ, γ accipiantur quantitates conſtantes, tum primam æquationem reliquas binas ultro in ſe complecti; ſi enim fuerit $o = \alpha P + \zeta Q + \gamma R$, tum ſimul erit $o = \alpha dP + \zeta dQ + \gamma dR$, & $o = \alpha ddP + \zeta ddQ + \gamma ddR$;

Digitized by Google

& quia eſt $P' = P + dP$; $Q' = Q + dQ$, $R' = R + dR$, atque $P'' = P + 2dP + ddP$; $Q'' = Q + 2dQ + ddQ$ & $R'' = R + 2dR + ddR$; fiet quoque

$$0 = \alpha P' + \beta Q' + \gamma R'$$

&

$$0 = \alpha P'' + \beta Q'' + \gamma R''.$$

Quocirca ad Problema ſolvendum formanda eſt hæc æquatio

$$0 = \alpha P + \beta Q + \gamma R;$$

quæ, ſi loco α, β, & γ quantitates quæcunque conſtantes arbitrariæ ſcribantur, exprimet naturam curvæ quæſitæ. Congruit autem omnino hæc æquatio cum ea quam altera Methodo elicuimus, alteraque Methodus per alteram confirmatur. Q. E. I.

Coroll. I.

16. Omnia ergo hujus quoque generis Problemata reſolvi poſſunt, ope valorum differentialium ex unius applicatæ mutatione oriundorum, quos ſupra ſatis ampliter invenire docuimus.

Coroll. II.

17. Manifeſtum igitur eſt, ſi curva debeat inveniri quæ, inter omnes alias ad eandem abſciſſam relatas atque in quas binæ expreſſiones A & B æqualiter competant, habeat valorem expreſſionis C maximum minimumve; tum quæſtionem redire ad hanc, quæ ad Methodum abſolutam pertineat, ut, inter omnes omnino curvas ad eandem abſciſſam relatas, determinetur ea in qua ſit expreſſio $\alpha A + \beta B + \gamma C$ maximum vel minimum.

Coroll. III.

18. Simul vero etiam hinc Methodus patet reſolvendi Problema-

Digitized by Google

blemata, in quibus, inter omnes curvas in quas plures duabus atque adeo quotcunque proprietates æqualiter conveniant, ea requiritur quæ maximi minimive cujuſdam proprietate gaudeat.

COROLL. IV.

19. Quod ſi enim, inter omnes curvas in quibus expreſſiones A, B, C, D æquales obtineant valores, ea debeat inveſtigari in qua ſit expreſſio E maximum vel minimum; tum quæſito ſatisfiet, ſi inter omnes omnino curvas ea quæratur in qua ſit $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D + \varepsilon E$ maximum vel minimum; denotantibus litteris α, β, γ, δ, ε quantitates quaſcunque conſtantes & arbitrarias.

COROLL. V.

20. Quo plures igitur proponantur proprietates, quæ iis curvis, ex quibus quæſitam maximi minimive indole præditam indagare oportet, communes eſſe debeant; eo plures in æquationem pro curva ingredientur quantitates conſtantes arbitrariæ; atque adeo eo plures curvæ ſatisfacientes in ea comprehendentur.

SCHOLION I.

21. Cur eo plures conſtantes in Solutionem ingrediantur, quo plures proponantur proprietates communes, ex præcedentibus facile colligi poteſt. Ponamus enim, inter omnes curvas eadem proprietate A gaudentes, eam inveſtigari oportere, in qua ſit B maximum vel minimum: ac primo quidem conſtabit huic Quæſtioni eam curvam eſſe ſatisfacturam quæ, inter omnes omnino curvas, habeat B maximum vel minimum; hæc enim, inter omnes quoque illas quæ ſecum eadem communi proprietate A gaudebunt, habebit B maximum vel minimum. Deinde autem licet innumerabilia iſtiuſmodi curvarum genera concipi, quæ ſingula eundem valorem expreſſionis A recipiant; in uno

Digitized by Google

quoque vero genere una erit curva, quæ præ reliquis valorem expreſſionis *B* continebit maximum vel minimum. Neceſſe autem eſt has curvas ſatisfacientes omnes in Solutione generali contineri debere. Cum igitur, ob unam proprietatem communem præſcriptam, numerus curvarum ſatisfacientium ſit infinitus, multo magis is augebitur, propter eandem rationem, ſi plures proprietates communes proponantur. Interim tamen ſi valores, quos habent ſingulæ proprietates communes in curvis ex quibus quæſitam erui oportet actu definiantur, tum utique ſolutio unicam Curvam ſatisfacientem præbebit. Conſtantes ſcilicet illæ eo inſervient ut valores, quos proprietates communes in curva inventa obtinebunt, pro arbitrio determinentur; ſic, per has conſtantes, in caſu duarum proprietatum communium *A* & *B*, curva poterit aſſignari quæ datos expreſſionum *A* & *B* recipiat valores, atque inſuper ita ſit comparata ut, inter omnes infinitas alias eoſdem illarum expreſſionum *A* & *B* valores recipientes, habeat valorem alius cujuſcunque expreſſionis *C* maximum vel minimum. Atque hæc eadem admonitio locum habet, ſi plures proprietates communes fuerint præſcriptæ; ex quo ſatis perſpicuum eſt, quid hiſce conſtantibus in Solutionem ingredientibus ſit faciendum, & quomodo eas ad uſum traduci oporteat: id quod in ſequentibus Exemplis clarius declarari poterit.

EXEMPLUM I.

Fig. 14. 22. *Inter omnes curvas ad eandem abſciſſam* AC = a *relatas, quæ cum inter ſe ejuſdem ſint longitudinis, tum etiam æquales areas* DAD *comprehendant; determinare eam, quæ circa axem* AC *rotata generet ſolidum maximæ vel minimæ capacitatis.*

Poſitis abſciſſa AP = *x*, applicata PM = *y* & *dy* = *pdx*; binæ proprietates communes propoſitæ ſunt $\int y\,dx$ & $\int dx\sqrt{(1+pp)}$; at maximi minimive formula eſt $\int yy\,dx$. Quærantur jam harum trium formularum valores differentiales. Ac primo quidem erit formulæ $\int y\,dx$ valor differentialis = *nv*. *dx*; deinde formulæ

Digitized by Google

mulæ $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ valor differentialis eſt $= -m.d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$: & tertio formulæ $\int yy\,dx$ valor differentialis eſt $= 2n.y\,dx$. Ex quibus tribus valoribus differentialibus conficietur pro curva quæſita iſta æquatio, $0 = a\,dx - 6d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} + 2yy\,dx$, ſeu $ccd.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = b\,dx + 2y\,dx = \frac{cc\,dp}{(1+pp)^{3:2}}$. Multiplicetur hæc æquatio per p & integretur; habebitur $ff + by + yy = \frac{-cc}{\sqrt{(1+pp)}}$, ubi tam cc quam ff pro arbitrio ſive affirmative ſive negative accipere licet. Hinc porro fiet $(ff+by+yy)^2 (1+pp) = c^4$; & $p = \frac{\sqrt{(c^4-(ff+by+yy)^2)}}{ff+by+yy} = \frac{dy}{dx}$; ideoque $dx = \frac{(ff+by+yy)\,dy}{\sqrt{(c^4-(ff+by+yy)^2)}}$; quæ eſt æquatio pro curva Elaſtica. Ingredietur autem, per integrationem unam reliquam, nova quarta conſtans arbitraria; atque hiſce quatuor conſtantibus effici poterit ut curva per data duo puncta tranſeat; deinde binis reliquis conſtantibus obtinebitur, ut poſito $x = a$, tam area curvæ quam ejus longitudo datam magnitudinem conſequantur. Inſuper autem ambiguitate ſignorum, qua ſignum radicale afficitur, alterum ſignum præbebit curvam maximi, alterum minimi proprietate gaudentem. Quoniam autem in æquatione inventa data illa abſciſſæ magnitudo a non ineſt; ſequitur curvæ inventæ portionem quamvis cuicunque abſciſſæ reſpondentem hac quoque gaudere prærogativa ut, inter omnes alias curvas eidem illi abſciſſæ reſpondentes, & per eadem duo puncta tranſeuntes, quæ ſimul cum illa curva tum æqualem longitudinem quam æqualem aream complectantur, ut illa, inquam, curva circa abſciſſam ſuam rotata generet ſolidum maximæ minimæve capacitatis. Duo ſcilicet puncta, per quæ curva quæſita tranſeat, ideo hîc in conſiderationem ſunt ducenda, quia calculus præbuit æquationem differentialem ſecundi gradus, quæ per ſe duplicem determinationem requirit. Poterunt vero etiam

binæ

binæ reliquæ conſtantes, quæ ſtatim in æquatione inventa inerant, per puncta determinari, hocque pacto determinata ſolutio hujuſmodi emerget, quæ docebit per quatuor data puncta curvam deſcribere, quæ inter omnes alias per eadem quatuor puncta tranſeuntes, atque cum æque longas tum æquales areas continentes, producat circa axem rotata ſolidum vel maximum vel minimum. Perpetuo nimirum numerus conſtantium arbitrariarum, quæ in æquatione inventa cum actu tum potentia inſunt, declarabit quot determinationes ſint adhibendæ ut curva determinetur; hæcque deinde, inter omnes alias curvas iiſdem determinationibus prædita, quæſito ſatisfaciet.

EXEMPLUM II.

23. *Inter omnes lineas eidem abſciſſæ reſpondentes, quæ primo æquales contineant areas* $\int y\,dx$, *atque præterea circum axem rotatæ æqualia generent ſolida* $\int yy\,dx$; *determinare eam quæ ſuum gravitatis centrum vel maxime vel minime habeat elevatum; hoc eſt in qua ſit* $\frac{\int y\,x\,dx}{\int y\,dx}$ *vel maximum vel minimum.*

Sit abſciſſæ longitudo præſcripta, ad quam Solutionem accommodari oportet, $= a$; atque pro hac abſciſſa fiat valor formulæ $\int y\,dx = A$, formulæ $\int yy\,dx = B$, & formulæ $\int y\,x\,dx = C$. Porro ſit valor differentialis formulæ $\int y\,dx = dA = dx$; formulæ $\int yy\,dx = dB = 2y\,dx$, & formulæ $\int y\,x\,dx = dC = x\,dx$; ſumptis nimirum harum formularum valoribus differentialibus ſecundum regulas ſupra datas: omittendo tantum particulam nv, quippe quæ perpetuo per diviſionem tollitur. Cum jam maximi minimivee xpreſſio ſit, non ſimplex formula, ſed fractio $\frac{\int y\,x\,dx}{\int y\,dx}$; ejus valor differentialis erit $= \frac{A\,dC - C\,dA}{A^2}$ $= \frac{A\,x\,dx - C\,dx}{A^2}$; atque, ob proprietatum binarum communium $\int y\,dx$ & $\int yy\,dx$ valores differentiales datos, nempe $dA = dx$ & $dB = 2y\,dx$, reſultabit pro curva quæſita ſequens æquatio

tio $\alpha dx + 2\mathfrak{C}y dx + \frac{\gamma Ax dx - \gamma C dx}{A^2} = 0$, vel $(\alpha A^2 - \gamma C) dx + 2\mathfrak{C}A^2 y dx + \gamma Ax dx = 0$; in qua æquatione, cum $\alpha, \mathfrak{C}, \gamma$ ſint conſtantes arbitrariæ, earum transformatione ſimul conſtantes determinatæ A & C ex computo expelli poſſunt; ita ut Solutio inventa ad omnes abſciſſas æque fiat accommodata. Pervenietur autem ad hanc æquationem $b dx = my dx + nx dx$, ſeu, per dx diviſione inſtituta, $b = my + nx$, quæ æquatio eſt pro linea recta quacunque. Linea recta igitur ad axem verticalem utcunque ſita, inter omnes alias lineas cum axe tam eandem aream $\int y dx$ quam idem volumen $\int yy dx$ continentes, habebit ſuæ areæ centrum gravitatis vel maxime vel minime elevatum. Erit autem centrum gravitatis minime elevatum, ſi linea recta ſurſum cum axe convergat; maxime autem erit elevatum, ſi deorſum cum axe convergat; hique ſunt ambo caſus, quibus vel maxima vel minima centri gravitatis elevatio locum habet. Inter hos caſus eſt medius, quo linea illa recta fit axi parallela: de quo dubium ſupereſſe poteſt, utrum centrum gravitatis ſit vel maxime depreſſum vel maxime elevatum. Verum iſte caſus nequidem in Quæſtione locum invenit. Nam poſita linea recta axi parallela, ita ut ſit $y = b$, tum omnino nulla alia exhiberi poteſt linea quæ pro eadem abſciſſa, cum æqualem aream $\int y dx$ tum æquale volumen $\int yy dx$ contineat: hocque ideo evenit, quod iſta linea recta, inter omnes alias lineas eandem aream $\int y dx$ comprehendentes, minimum volumen $\int yy dx$ includat.

EXEMPLUM III.

24. *Inter omnes curvas ejuſdem longitudinis* DAD *puncta data* D. D *jungentes, determinare eam cujus hæc ſit proprietas ut, ſi inter rectas verticales* DB, DB *per horizontalem* NN *ſpatium* NDADN *date magnitudinis abſcindatur, hujus ſpatii* NDADN *Centrum gravitatis imum obtineat locum.* Fig. 21.

Quæſtionis hujus Solutio eximium habet uſum in Hydroſtatica,

ca, ejuſque ope ſolvetur Problema quo figura lintei D A D vaſi B D D B in punctis D D annexi inveſtigatur, quam induit, ſi vaſi data aquæ copia infundatur. Primo enim dum linteum extenſionem non admittit, longitudo curvæ D A D erit data, deinde etiam ſpatium N D A D N, quo quantitas aquæ infuſæ menſuratur, erit data: ac tertio, ſecundum generales Hydroſtaticæ & gravitationis leges, figuram D A D ita comparatam eſſe oportet, ut ſpatii N D A D N centrum gravitatis infimum occupet locum. Ad hoc Problema reſolvendum, ponatur D C $=$ C D $= a$, & ducta horizontali quacunque M P M, ſit M P $=$ P M $= x$, & A P $= y$, erit arcus M A M $= 2\int dx\sqrt{(1+pp)}$, poſito $dy = p\,dx$. Quod ſi jam longitudo curvæ D A D ponatur $= 2b$; æquatio inter x & y ita debet eſſe comparata, ut formula integralis $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ fiat $= b$, poſito $x = a$. Porro area M A M fit $= 2\int x\,dy = 2\int xp\,dx$; quæ fiat $= 2ff$, caſu quo ponitur $x = a$; ita ut tum ſit $\int xp\,dx = ff$. Hæc vero area non ipſa eſt data, ſed ea cum area N D D N datum ſpatium producere debet quod ſit $= 2cc$. Si igitur ponatur D N $= z$, erit $az + ff = cc$, & $z = \frac{cc-ff}{a} = \frac{cc-\int xp\,dx}{a}$, poſito $x = a$. Denique centrum gravitatis totius ſpatii N D A D N a puncto A diſtabit intervallo $= \frac{\int xyp\,dx + az(AC+\frac{1}{2}z)}{cc}$, poſito poſt integrationem $x = a$; infra punctum C igitur centrum gravitatis ſitum erit intervallo $= \frac{AC(cc-az)-\frac{1}{2}azz-\int xyp\,dx}{cc}$, quod debet eſſe maximum. Cum vero ſit $z = \frac{cc-\int xp\,dx}{a}$; maximum eſſe debebit hæc forma $AC\int xp\,dx - \frac{c^4}{2a} + \frac{cc\int xp\,dx}{a} - \frac{(\int xp\,dx)^2}{2a} - \int xyp\,dx$. Problema itaque huc redit ut, inter omnes curvas ejuſdem longitudinis datæ abſciſſæ D C $= a$ reſpondentes, definiatur ea in qua ſit hæc expreſſio $b\int xp\,dx + \frac{cc}{a}\int xp\,dx -$

$\frac{1}{2a}$

$\frac{1}{2a}(\int x p\,dx)^2 - \int x y p\,dx$ maximum, exiſtente $y = b$, poſito $x = a$. Jam quia longitudo curvæ eſt $= \int dx\sqrt{(1+pp)}$, erit ejus valor differentialis $= -d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Deinde formulæ $\int x p\,dx$ valor differentialis eſt $= -dx$, & valor differentialis formulæ $\int x y p\,dx = x p\,dx - d.xy = -y\,dx$. Hinc totius expreſſionis, quæ maximum eſſe debet, valor differentialis prodit $= -b\,dx - \frac{cc}{a}dx + \frac{ff}{a}dx + y\,dx$, quæ, ob b & ff conſtantes non determinatas, tranſit in hanc $k\,dx + y\,dx$; ubi k eſt conſtans arbitraria. Quocirca prodibit iſta æquatio pro curva quæſita $k\,dx + y\,dx = -gg\,d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$; quæ, per p multiplicata & integrata, dabit $m + 2ky + yy = \frac{2gg}{\sqrt{(1+pp)}}$; quam curvam conſtat eſſe Elaſticam, manebitque ea invariata, quemcunque valorem obtineat quantitas cc. Quæſtioni ergo propoſitæ ita ſatisfiet, ut per data puncta D & D curva Elaſtica traducatur, cujus axis ſeu diameter orthogonalis ſit recta verticalis AC, & cujus portio DAD datam obtineat longitudinem $2b$; hocque pacto, Solutio omnino erit determinata, unicaque curva ſatisfaciens reſultabit. Quod autem quantitas ſpatii NDADN $= 2cc$, de cujus centro gravitatis quæſtio eſt, prorſus ex computo exceſſerit, id quidem facile prævidere licuiſſet; quo pacto, Solutio multo facilior extitiſſet. Verum data opera hanc conditionem, etſi inutilem, adjecimus, ut modus pateret alia iſtiuſmodi Problemata, ubi talis reductio locum non invenit, reſolvendi.

SCHOLION II.

25. Sic igitur expoſita eſt univerſa Methodus maximorum & minimorum indeterminata, qua linea curva quæri ſolet maximi minimive proprietate quapiam prædita. Iſtaque Methodus tota perducta eſt ad inventionem valorum differentialium, qui ex unius tantum applicatæ incremento oriuntur. Scilicet ſi Pro-

blema poſtulet, inter omnes omnino curvas ad eandem abſciſſam relatas, eam in qua expreſſio quæpiam indefinita maximum minimumve obtineat valorem; tum illius expreſſionis quærendus eſt valor differentialis; qui nihilo æqualis poſitus dabit æquationem pro Curva quæſita. Quod ſi autem, inter omnes curvas quæ una pluribuſve proprietatibus communibus gaudeant, eam definiri oporteat, in qua valor cujuſpiam expreſſionis propoſitæ fiat maximus vel minimus; tum, tam ſingularum proprietatum communium, quam maximi minimive, expreſſionis quæri debent valores differentiales, hique ſinguli per conſtantes arbitrarias multiplicari, quorum productorum ſumma nihilo æqualis poſita dabit æquationem pro Curva quæſita. Ad valorem autem differentialem cujuſque expreſſionis indeterminatæ inveniendum, Regulas in ſuperioribus Capitibus ſufficientes atque admodum faciles tradidimus. Ejuſmodi enim expreſſio indeterminata, ſive proprietatem communem continens, ſive maximum minimumve, perpetuo vel eſt formula integralis ſimplex, vel functio duarum pluriumve hujuſmodi formularum integralium. Quod vero ad formulas integrales ſimplices attinet; in Cap. IV §. 7 præcepta expoſuimus, quorum ope ejuſmodi formularum valores differentiales reperiri queant; ubi hanc indagationem ad quinque caſus reduximus. Quemadmodum autem ſecundum hæc eadem præcepta, cujuſcunque functionis duarum pluriumve formularum integralium ſimplicium valor differentialis conveniens definiri queat, id in ejuſdem Cap. IV, Propoſitione 4, indicavimus, modumque differentiationis ſimilem atque ſatis facilem expoſuimus: ita ut in hoc genere nihil ſupereſſe videatur, quod inſuper ſit adjiciendum.

FINIS.

AD-

ADDITAMENTUM I.

De Curvis Elaſticis.

I.

JAm pridem ſummi quique Geometræ agnoverunt, Methodi in hoc Libro traditæ non ſolum maximum eſſe uſum in ipſa Analyſi, ſed etiam eam ad reſolutionem Problematum phyſicorum ampliſſimum ſubſidium afferre. Cum enim Mundi univerſi fabrica ſit perfectiſſima, atque a Creatore ſapientiſſimo abſoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quæpiam eluceat: quamobrem dubium prorſus eſt nullum, quin omnes Mundi effectus ex cauſis finalibus, ope Methodi maximorum & minimorum æque feliciter determinari queant, atque ex ipſis cauſis efficientibus. Hujus rei vero paſſim tam eximia extant ſpecimina, ut ad veritatis confirmationem pluribus Exemplis omnino non indigeamus; quin potius in hoc erit elaborandum, ut, in quovis Quæſtionum naturalium genere, ea inveſtigetur quantitas, quæ maximum minimumve induat valorem: quod negotium ad Philoſophiam potius quam ad Matheſin pertinere videtur. Cum igitur duplex pateat via effectus Naturæ cognoſcendi; altera per cauſas efficientes, quæ Methodus directa vocari ſolet; altera cauſas finales; Mathematicus utrâque pari ſucceſſu utitur. Quando ſcilicet cauſæ efficientes nimis ſunt abſconditæ, finales autem noſtram cognitionem minus effugiunt; per Methodum indirectam Quæſtio ſolet reſolvi: e contrario autem Methodus directa adhibetur, quoties ex cauſis efficientibus effectum definire licet. Inprimis autem opera eſt adhibenda, ut per utramque viam aditus ad Solutionem aperiatur: ſic enim non ſolum altera Solutio per alteram maxime confirmatur, ſed etiam ex utriuſque conſenſu

ſummam percipimus voluptatem. Hoc modo, curvatura funis ſeu catenæ ſuſpenſæ duplici via eſt eruta; altera a priori, ex ſollicitationibus gravitatis; altera vero per Methodum maximorum ac minimorum, quoniam funis ejuſmodi curvaturam recipere debere intelligebatur, cujus centrum gravitatis infimum obtineret locum. Similiter curvatura radiorum per medium diaphanum variæ denſitatis tranſeuntium, tam a priori eſt determinata, quam etiam ex hoc principio, quod tempore breviſſimo ad datum locum pervenire debeant. Plurima autem alia ſimilia exempla a Viris Celeberrimis BERNOULLIIS, aliiſque, ſunt prolata, quibus tam Methodus ſolvendi a priori, quam cognitio cauſarum efficientium maxima accepit incrementa. Quanquam igitur, ob hæc tam multa ac præclara ſpecimina, dubium nullum relinquitur, quin in omnibus lineis curvis, quas Solutio Problematum phyſico-mathematicorum ſuppeditat, maximi minimive cujuſpiam indoles locum obtineat; tamen ſæpenumero hoc ipſum maximum vel minimum difficillime perſpicitur; etiamſi a priori Solutionem eruere licuiſſet. Sic etſi figura, quam lamina elaſtica incurvata induit, jam pridem eſt cognita; tamen quemadmodum ea curva per Methodum maximorum & minimorum, hoc eſt, per cauſas finales, inveſtigari poſſit, a nemine adhuc eſt animadverſum. Quamobrem cum Vir Celeberrimus, atque in hoc ſublimi naturam ſcrutandi genere perſpicaciſſimus, *Daniel* BERNOULLI mihi indicaſſet ſe univerſam vim, quæ in lamina elaſtica incurvata inſit, una quadam formula quam *vim potentialem* appellat, complecti poſſe; hancque expreſſionem in curva Elaſtica minimam eſſe oportere; quoniam hoc invento Methodus mea maximorum ac minimorum hoc Libro tradita mirifice illuſtratur, ejuſque uſus ampliſſimus maxime evincitur; hanc occaſionem exoptatiſſimam prætermittere non poſſum, quin, hanc inſignem curvæ Elaſticæ proprietatem a Celeb. BERNOULLIO obſervatam publicando, ſimul Methodi meæ uſum clarius patefaciam. Continet enim iſta proprietas in ſe differentialia ſecundi gradus, ita ut ei evolvendæ Methodi Problema iſoperimetricum ſolvendi ante traditæ non ſufficiant.

2. Sit

2. Sit AB lamina Elaſtica utcunque incurvata; vocetur arcus AM $= s$, & radius oſculi curvæ MR $= R$: atque, ſecundum BERNOULLIUM, exprimetur *vis potentialis* in laminæ portione AM contenta hac formula $\int \frac{ds}{RR}$, ſiquidem lamina ſit ubique æqualiter craſſa, lata & elaſtica, atque in ſtatu naturali in directum extenſa. Hinc iſta erit curvæ AM indoles, ut in ea hæc expreſſio omnium minimum obtineat valorem. Quoniam vero in radio oſculi R differentialia ſecundi gradus inſunt, ad curvam hac proprietate præditam determinandam quatuor opus erit conditionibus, id quod cum Quæſtionis natura apprime convenit. Cum enim per datos terminos A & B infinitæ laminæ Elaſticæ eæque ejuſdem longitudinis inflecti queant, quæſtio non erit determinata, niſi præter duo puncta A & B, ſimul alia duo puncta, ſeu quod eodem redit poſitio tangentium in punctis extremis A & B præſcribatur. Propoſita namque lamina Elaſtica, longiori quam eſt diſtantia punctorum A & B; ea non ſolum ita incurvari poteſt, ut intra terminos A & B contineatur, ſed etiam ut ejus tangentes in punctis hiſce datas teneant directiones. His notatis; Quæſtio de invenienda curvatura laminæ Elaſticæ, ex hoc fonte reſolvenda, ita debet proponi: *ut, inter omnes curvas ejuſdem longitudinis, quæ non ſolum per puncta* A *&* B *tranſeant, ſed etiam in his punctis a rectis poſitione datis tangantur, definiatur ea in qua ſit valor hujus expreſſionis* $\int \frac{ds}{RR}$ *minimus.*

De curvatura Laminæ Elaſticæ uniformis. Fig. 1.

3. Quia ſolutionem ad coordinatas orthogonales accommodari convenit, ſumatur recta quæcunque AD pro axe, in qua ſit abſciſſa AP $= x$, applicata PM $= y$; ponatur, uti Methodus tradita jubet, $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$; erit elementum curvæ Mm $= ds = dx\sqrt{(1 + pp)}$. Primum ergo quia curvæ, ex quibus quæſita erui debet, iſoperimetræ ſtatuuntur, habebitur iſta expreſſio conſideranda $\int dx\sqrt{(1 + pp)}$; quæ cum generali $\int Z\,dx$ comparata hunc præbet valorem differentialem

Fig. 2.

$$\frac{1}{dx}$$

Digitized by Google

$\frac{1}{dx}\,d.\,\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Deinde cum fit radius oſculi $=\frac{dx\sqrt{1+pp)^{3:2}}}{dp}$ $=\frac{(1+pp)^{3:2}}{q}=R$, formula $\int\frac{ds}{RR}$, quæ minimum eſſe debet, abit in $\int\frac{-qq\,dx}{(1+pp)^{5:2}}$. Comparetur hæc cum forma generali $\int Z\,dx$; erit $Z=\frac{-qq}{(1+pp)^{5:2}}$, & poſito $dZ=M\,dx+N\,dy+P\,dp+Q\,dq$, erit $M=0$, $N=0$, $P=\frac{-5pqq}{(1+pp)^{7:2}}$, & $Q=\frac{2q}{(1+pp)^{5:2}}$. Valor ergo differentialis ex hac formula $\int\frac{qq\,dx}{(1+pp)^{5:2}}$ oriundus, erit $-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}$. Quamobrem pro curva quæſita hæc habebitur æquatio, $\frac{\alpha}{dx}\,d.\,\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ $=\frac{dP}{dx}-\frac{ddQ}{dx^2}$; quæ, per dx multiplicata & integrata, dat $\frac{\alpha p}{\sqrt{(1+pp)}}+C=P-\frac{dQ}{dx}$. Multiplicetur hæc æquatio per $q\,dx=dp$, ut prodeat $\frac{\alpha p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}+C\,dp=P\,dp-q\,dQ$. Cum autem, ob $M=0$ & $N=0$, ſit $dZ=P\,dp+Q\,dq$, erit $P\,dp=dZ-Q\,dq$, quo valore loco $P\,dp$ ſubſtituto, emerget $\frac{\alpha p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}+C\,dp=dZ-Q\,dq-q\,dQ$; quæ denuo integrata dat $\alpha\sqrt{(1+pp)}+Cp+\gamma=Z-Qq$. Jam cum ſit $Z=\frac{-qq}{(1+pp)^{5:2}}$, & $Q=\frac{2q}{(1+pp)^{5:2}}$, erit $\alpha\sqrt{(1+pp)}+Cp+\gamma=\frac{-qq}{(1+pp)^{5:2}}$. Sumantur conſtantes arbitrariæ α, C, & γ negativæ, eritque $q=(1+pp)^{5:4}\times\sqrt{(\alpha$

$\times\sqrt{(\alpha\sqrt{(1+pp)}+\mathfrak{G}p+\gamma)}=\frac{dp}{dx}$. Hinc ergo elicitur ſequens æquatio

$$dx=\frac{dp}{(1+pp)^{5:4}\sqrt{(\alpha\sqrt{(1+pp)}+\mathfrak{G}p+\gamma)}}.$$

Deinde ob $dy=p\,dx$, habebitur quoque

$$dy=\frac{p\,dp}{(1+pp)^{5:4}\sqrt{(\alpha\sqrt{(1+pp)}+\mathfrak{G}p+\gamma)}};$$

quæ duæ æquationes ſufficerent ad curvam per quadraturas conſtruendam.

4. Harum formularum ſic in genere ſpectatarum neutra eſt integrabilis; combinari autem certo quodam modo poſſunt, ut aggregatum integrationem admittat. Cum enim ſit

$$d.\frac{2\sqrt{(\alpha\sqrt{(1+pp)}+\mathfrak{G}n+\nu)}}{\sqrt{(1+pp)}}=\frac{dp(\mathfrak{G}-\gamma p)}{(1+pp)^{5:4}\sqrt{(\alpha\sqrt{(1+pp)}+\mathfrak{G}p+\gamma)}}$$

erit $\frac{2\sqrt{(\alpha\sqrt{(1+pp)}+\mathfrak{G}p+\gamma)}}{(1+pp)^{1:4}}=\mathfrak{G}x-\gamma y+\delta$. Quoniam axis poſitio eſt arbitraria, conſtans δ ſine defectu amplitudinis omitti poteſt. Deinde vero etiam axis ita mutari poteſt ut fiat $\frac{\mathfrak{G}x-\gamma y}{\sqrt{(\mathfrak{G}\mathfrak{G}+\gamma\gamma)}}$ abſciſſa, eritque applicata $\frac{\gamma x+\mathfrak{G}y}{\sqrt{(\mathfrak{G}\mathfrak{G}+\gamma\gamma)}}$; hinc etiam tuto γ nihilo æqualis poni poteſt, quia nihil impedit, quominus illa nova abſciſſa per x exprimatur. Hanc ob rem; habebimus pro curva Elaſtica iſtam æquationem

$2\sqrt{(\alpha\sqrt{(1+pp)}+\mathfrak{G}p)}=\mathfrak{G}x(1+pp)^{1:4}$; quæ, ſumptis quadratis, dat $4\alpha\sqrt{(1+pp)}+4\mathfrak{G}p=\mathfrak{G}^2x^2\sqrt{(1+pp)}$. Sit, ad homogeneitatem introducendam, $\alpha=\frac{4m}{aa}$ & $\mathfrak{G}=\frac{4n}{aa}$ erit $maap=(nnxx-maa)\sqrt{(1+pp)}$, unde $n^2a^4pp=(nnxx-maa)^2(1+pp)$; ideoque $p=\ldots$

$$\frac{nnxx-maa}{\sqrt{(n^2a^4-(nnxx-maa)^2)}}=\frac{dy}{dx}.$$ Mutatis ergo conſtantibus, atque abſciſſam x data conſtante ſive augendo ſive minuendo; habebitur hujuſmodi æquatio pro curva Elaſtica generalis:

$dy = \frac{(\alpha + 6x + \gamma xx)\,dx}{\sqrt{(a^4 - (\alpha + 6x + \gamma xx)^2)}}$, ex qua oritur

$ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{(a^4 - (\alpha + 6x + \gamma xx)^2)}}$; ex quibus æquationibus consensus hujus curvæ inventæ cum curva Elastica jam pridem eruta manifesto elucet.

5. Quo autem iste consensus clarius ob oculos ponatur, naturam curvæ Elasticæ a priori quoque investigabo; quod etsi jam a Viro summo *Jacobo* BERNOULLIO excellentissime est factum; tamen, hac idonea occasione oblata, nonnulla circa indolem curvarum Elasticarum, earumque varias species & figuras adjiciam; quæ ab aliis vel prætermissa, vel leviter tantum pertractata esse video.

Fig. 3. Sit lamina Elastica AB in B ita muro seu pavimento firmo infixa, ut hæc extremitas B non solum firmiter retineatur, sed etiam tangentis in B positio determinetur. In A autem lamina connexam habeat virgam rigidam AC, cui normaliter applicata sit vis CD $= P$, qua lamina in statum incurvatum BMA redigatur. Sumatur hæc recta AC producta pro axe, ac, posita AC $= c$, sit abscissa AP $= x$, applicata PM $= y$. Quod si jam lamina in M omnem elasticitatem subito amitteret, ac perfecte flexilis evaderet; a vi P utique inflecteretur, inflexione proficiscente a vis P momento $= P(c + x)$. Quominus ergo hæc inflexio actu sequatur, elasticitas laminæ in M in æquilibrio consistit cum vis sollicitantis momento $P(c + x)$. Elasticitas autem primo ab indole materiæ ex qua lamina constat, & quam ubique eandem statuo, pendet; tum vero simul ab incurvatione laminæ in puncto M, ita ut sit reciproce proportionalis radio osculi in M. Sit ergo radius osculi in M $= R = \frac{ds^3}{-dx\,ddy}$; existente $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ & dx constante; atque exprimat $\frac{Ekk}{R}$ vim Elasticam laminæ in M, quæ cum momento vis sollicitantis $P(c + x)$ in æquilibrio consistat, ita ut sit $P(c + x) = \frac{Ekk}{R} = \frac{-Ekk\,dx\,ddy}{ds^3}$. Æquatio hæc per

per dx multiplicata fit integrabilis, eritque integrale $P(\alpha x + \epsilon x + \varphi) = \frac{-Ekkdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; unde oritur $dy = \frac{-Pdx(\frac{1}{2}\alpha x + \epsilon x + \varphi)}{\sqrt{(E^2k^4 - P^2(\frac{1}{2}\alpha x + \epsilon x + \varphi)^2)}}$, quæ æquatio omnino convenit cum ea, quam modo per Methodum maximorum ac minimorum ex principio *Bernoulliano* elicui.

6. Ex comparatione hujus æquationis cum ante inventa, definiri poterit vis quæ requiritur ad datam laminæ curvaturam inducendam; siquidem curvatura contineatur in æquatione generali inventa. Teneat scilicet lamina elastica figuram AMB, cujus natura exprimatur hac æquatione $dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma xx)dx}{\sqrt{(a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma xx)^2)}}$; exprimat vero Ekk hujus laminæ elasticitatem absolutam, ita scilicet, ut Ekk, in quovis loco, per radium osculi divisa præbeat vim elasticam veram. Ad comparationem instituendam multiplicetur numerator & denominator per $\frac{Ekk}{aa}$, ut habeatur $dy = \frac{Ekkdx(\alpha + \beta x + \gamma xx) : aa}{\sqrt{(E^2k^4 - \frac{E^2k^4}{a^4}(\alpha + \beta x + \gamma xx)^2)}}$. Nunc ergo erit $-\frac{1}{2}P = \frac{Ekk\gamma}{aa}$; $-P\epsilon = \frac{Ekk\beta}{aa}$; $-P\varphi = \frac{Ekk\alpha}{aa}$; ideoque vis CD sollicitans $= \frac{-2Ekk\gamma}{aa}$; intervallum AC $= \epsilon = \frac{\beta}{2\gamma}$, & constans $\varphi = \frac{\alpha}{2\gamma}$.

7. Ut igitur lamina elastica AB altero termino B muro infixa incurvetur in figuram AMB, cujus natura exprimitur hac æquatione $dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma xx)dx}{\sqrt{(a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma xx)^2)}}$, necesse est ut hæc lamina sollicitetur in directione CD normali ad axem AP, sumpta distantia AC $= \frac{\beta}{2\gamma}$, a vi CD $= \frac{-2Ekk\gamma}{aa}$; quæ vis scilicet in plagam contrariam, ac figura indicat, dirigetur,

si γ fuerit quantitas positiva. Quia $\frac{Ekk}{R}$ æquivalet momento vis sollicitantis, expressio $\frac{Ekk}{aa}$ homogenea erit ponderi seu vi puræ; quæ vis propterea $\frac{Ekk}{aa}$ cognoscetur ex elasticitate laminæ. Sit hæc vis $= F$; atque erit vis flectens CD ad hanc vim F ut -2γ ad 1; erit enim γ numerus purus.

8. Hinc porro definiri potest vis ad laminæ portionem BM in statu suo conservandam requisita, si portio AM prorsus rescindatur. Rescissa hac portione AM, desinat lamina Elastica in virgam rigidam MT omnis flexionis expertem, quæ autem cum lamina ita sit connexa, ut perpetuo tangentem in puncto M referat, utcunque lamina inclinetur. Hoc posito, ex antecedentibus manifestum est, ad conservationem curvaturæ BM requiri ut virga MT in puncto N trahatur in directione ND vi quæ sit $= \frac{-2Ekk\gamma}{aa}$; directio autem ND erit normalis ad axem AP, atque intervallum AC erit $= \frac{\epsilon}{2\gamma}$. Distantia itaque MN fiet $= \frac{ds}{dx}$ CP $= \frac{ds}{dx} \cdot \frac{\epsilon + 2\gamma x}{2\gamma} = \frac{(\epsilon + 2\gamma x)ds}{2\gamma dx}$ est vero $\frac{ds}{dx} = \frac{aa}{\sqrt{(a^4 - (\alpha + \epsilon x + \gamma xx)^2)}}$. Quod si hæc vis ND $= \frac{-2Ekk\gamma}{aa}$ resolvatur in normalem NQ ad tangentem MT, & tangentialem NT, erit vis normalis NQ $= \frac{-2Ekk\gamma}{aa} \cdot \frac{dx}{ds}$, & vis tangentialis NT $= \frac{-2Ekk\gamma}{aa} \cdot \frac{dy}{ds}$.

9. Sin autem pars BM rescindatur, relicta parte AM, quæ in directione CD sollicitatur ut ante vi $= \frac{-2Ekk\gamma}{aa}$; ad curvaturam AM conservandam extremitas M, quæ connexa intelligatur cum virga rigida tangente MN, sollicitari debebit in puncto N a vi pariter $= \frac{-2Ekk\gamma}{aa}$, sed in directione contraria

traria ei, quam casu præcedente invenimus. Perpetuo enim vires utrique extremitati laminæ incurvatæ aplicandæ se mutuo destruere, atque adeo æquales & directiones oppositas habere debent. Alioquin enim tota lamina moveretur, ad quem motum compescendum opus foret vi æquilibrium inter vires sollicitantes producente. Hinc ergo vires cuicunque portioni laminæ resectæ applicandæ facillime definiri possunt, quæ jam inductam curvaturam conservent.

10. Sit AM lamina Elastica incurvata, quæ in A & M annexas habeat virgas rigidas AD, MN, quibus in directionibus directe oppositis DE, NR applicatæ sint vires æquales DE, NR, quæ in æquilibrio consistentes laminæ curvaturam AM inducant, pro qua æquationem quæri oporteat. Primum ergo, pro axe sumatur recta AP per punctum A transiens, atque ad directionem vis sollicitantis ER normalis. Ponatur Elasticitas laminæ absoluta $= Ekk$: sitque anguli CAD, quem tangens AD in A cum axe constituit, & qui est datus, sinus $= m$, cosinus $= n$, existente sinu toto $= 1$, ita ut sit $mm + nn = 1$. Vocetur porro distantia AC $= c$, & vis flectens DE $=$ NR $= P$; ac, positis abscissa AP $= x$, applicata PM $= y$, natura curvæ hac exprimetur æquatione Fig. 4

$$dy = \frac{-Pdx\left(\frac{1}{2}xx + cx + f\right)}{\sqrt{\left(E^2k^4 - P^2\left(\frac{1}{2}xx + cx + f\right)^2\right)}}.$$ Quoniam vero directio tangentis in A datur, posito $x = 0$, fieri debet $\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}$; hinc ergo obtinebitur $\frac{m}{n} = \frac{-Pf}{\sqrt{(E^2k^4 - P^2f)}} = \frac{m}{\sqrt{(1 - mm)}}$, & $m = \frac{-Pf}{Ekk}$. Determinatur ergo hinc constans f, ita ut sit $f = \frac{-mEkk}{P}$, ideoque hinc tota curva determinatur.

11. Ad curvaturam ergo superiori æquatione expressam laminæ AM inducendam, tangenti AD in puncto D, ita ut sit AD $= \frac{c}{n}$, applicatam esse oportet vim DE $= P$; cujus Fig. 5.

Digitized by Google

directio sit parallela applicatis PM. Resolvatur hæc vis DE in duas laterales Dd, Df, inter se normales; erit vis $Dd = Pn$ & vis $Df = Pm$. Quo jam consideratio rectæ AD ex computo expellatur, loco vis Dd, in datis punctis A & B, sumpto intervallo $AB = h$, duæ vires substitui possunt, $Aa = p$; $Bb = q$; normales pariter ad virgam AB, sumendo $ph = Pn$. $BD = nP\left(\frac{c}{n} - h\right)$, & $q = p + nP$. Quia deinceps perinde est, in quonam virgæ AD puncto applicetur vis tangentialis $Df = mP$, applicetur ea in ipso puncto A ponendo $AF = nP$. Sit autem hæc vis $AF = r$, ita ut lamina MA a tribus viribus $Aa = p$, $Bb = q$, & $AF = r$ sollicitetur, a quibus, qualis incurvatio oriatur, investigemus.

12. Primo ergo, cum sit $mP = r$, erit $P = \frac{r}{m}$, qui valor substitutus in prioribus æquationibus dabit $ph = \frac{cr}{m} - \frac{nhr}{m}$, & $q = p + \frac{nr}{m}$. Hinc erit $\frac{n}{m} = \frac{q-p}{r}$; ex qua æquatione primum positio axis AP innotescit; erit nempe tangens anguli $CAD = \frac{r}{q-p}$: hinc $m = \frac{r}{\sqrt{(r^2+(q-p)^2)}}$ & $n = \frac{q-p}{\sqrt{(r^2+(q-p)^2)}}$. Deinde ex æquatione $hp = \frac{cr}{m} - \frac{nhr}{m} = \frac{cr}{m} - hq + hp$; fit $c = \frac{mhq}{r}$, seu $c = \frac{hq}{\sqrt{(r^2+(q-p)^2)}}$; atque $P = \sqrt{(rr+(q-p)^2)}$. Cum autem sit $f = \frac{-mEkk}{P} = \frac{-Ekkr}{\sqrt{rr+(q-p)^2}}$ erit $\frac{1}{2}xx + cx + f = \frac{1}{2}xx + \frac{hqx}{\sqrt{(r^2+(q-p)^2}} - \frac{Ekkr}{\sqrt{rr+(q-p)^2}}$; unde pro curva quæsita ista obtinebitur æquatio

$$dy = \frac{dx\left(\frac{Ekkr}{\sqrt{rr+(q-p)^2}}\right) - hqx - \frac{1}{2}xx\sqrt{(rr+(q-p)^2)}}{\sqrt{\left(E^2k^4 - \left(\frac{Ekkr}{\sqrt{(rr+(q-p)^2)}} - hqx - \frac{1}{2}xx\sqrt{(rr+(q-p)^2)}\right)^2\right)}}.$$

Hæc autem æquatio maxime est accommodata ad modum maxime

xime conſuetum laminas incurvandi, dum eæ vel forcipe vel duobus digitis apprehenduntur; quorum alter laminam in directione Aa, alter in directione Bb urget, præter quas vires lamina inſuper in directione AF protrahi poteſt.

13. Si vis tangentialis AF $= r$ evaneſcat; incidet axis AP in ipſam tangentem AF, productam, eritque tum

$$dy = \frac{-dx(hqx + \frac{1}{2}(q-p)xx)}{\sqrt{(E^2k^4 - (hqx + \frac{1}{2}(q-p)xx)^2)}}.$$

Sin autem vires normales p & q fiant inter ſe æquales; erit axis AP normalis ad tangentem AF, ob $n = 0$; & pro curva orietur hæc æquatio

$$dy = \frac{dx(Ekk - hqx - \frac{1}{2}rxx)}{\sqrt{(2Ekk(hqx + \frac{1}{2}rxx) - (hqx - \frac{1}{2}rxx)^2)}}.$$

Hic ſi præterea fuerit $r = 0$, ita ut lamina in punctis A & B urgeatur a viribus æqualibus Aa, Bb, contrariis tantum, natura curvæ exprimetur hac æquatione $dy = \frac{dx(Ekk - hqx)}{\sqrt{hq(2Ekkx - hqxx)}}$, quæ integrata dat $y = \sqrt{\frac{2Ekkx - hqxx}{hq}}$; quæ eſt pro Circulo, lamina ergo hoc caſu in arcum Circuli incurvatur, cujus radius erit $= \frac{Ekk}{hq}$.

14. Cum igitur videamus non ſolum Circulum in curvarum Elaſticarum claſſe contineri, ſed etiam in ipſis infinitam varietatem locum habere; operæ pretium erit hic enumerationem omnium variarum ſpecierum in hoc curvarum genere contentarum inſtituere. Hoc enim modo non ſolum indoles harum curvarum penitius perſpicietur; ſed etiam, caſu quocunque oblato, ex ſola figura dijudicare licebit, ad quamnam ſpeciem curva formata referri debeat. Eodem autem modo hic ſpecierum diverſitatem conſtituemus, quo vulgo linearum algebraïcarum ſpecies, in dato ordine contentæ enumerari ſolent. *Enumeratio curvarum Elaſticarum.*

15. Æquatio generalis pro curvis Elaſticis . . . . .

$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma xx)\,dx}{\sqrt{(a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma xx)^2)}},$$ initio abſciſſarum in axe

per

per intervallum $\frac{c}{2\gamma}$ promoto, & pro $\frac{aa}{\gamma}$ ſcribendo aa, ſeu ponendo $\gamma = 1$, accipiet hanc formam ſimpliciorem:

$dy = \frac{(a+xx)\,dx}{\sqrt{(a^4-(a+xx)^2)}}$. Quia vero eſt $a^4-(a+xx)^2 = (aa-a-xx)(aa+a+xx)$; ponatur $aa-a = cc$, ut ſit $a = aa-cc$, atque æquatio tranſibit in hanc formam

$dy = \frac{(aa-cc+xx)\,dx}{\sqrt{(cc-xx)(2aa-cc+xx)}}$. Quæ æquatione exprimatur natura curvæ AMC, ponta abſciſſa AP $= x$, & applicata PM $= y$. Cum ergo ſit $c = 0$, directio vis laminam Elaſticam incurvans erit ad axem AP in ipſo puncto A normalis, ideoque AD repræſentabit directionem vis ſollicitantis, quæ vis ipſa erit $= \frac{2Ekk}{aa}$, exprimente Ekk elaſticitatem abſolutam.

Fig. 6.

16. Si ponatur $x = 0$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{aa-cc}{c\sqrt{(2aa-cc)}}$; quæ expreſſio præbet tangentem anguli quem curva AM in A cum axe AP conſtituit; cujus anguli ſinus erit $= \frac{aa-cc}{aa}$. Quare ſi fuerit $aa = \infty$, lamina in puncto A erit normalis ad axem AP, nullamque habebit curvaturam, propterea quod vis incurvans $\frac{2Ekk}{aa}$ evaneſcit. Caſu ergo quo $a = \infty$, prodit laminæ figura naturalis, hoc eſt linea recta: quæ ergo primam ſpeciem linearum Elaſticarum conſtituit, quam repræſentabit recta AB utrimque in infinitum producta.

17. Antequam reliquas ſpecies enumeremus, conveniet in genere circa figuram Elaſticæ quaſdam obſervationes inſtituere. Intelligitur autem angulus PAM, quem curva in A cum axe AP conſtituit, decreſcere, quo minor evadat quantitas aa, hoc eſt quo magis vis incurvans $\frac{2Ekk}{aa}$ intendatur. Atque ſi evadat $aa = cc$, tum axis AP ipſe curvam in A tanget. Quod ſi autem fuerit $aa < cc$, tum curva AM, quæ adhuc deorſum excurrebat, nunc ſurſum verget, quoad fiat $aa = \frac{1}{2}cc$; quo caſu tangens

tangens curvæ in rectam A b incidet. At si fiat $aa < \frac{1}{2} cc$, tum angulus P A M prorsus fiet imaginarius, ideoque in A nulla existet curvæ portio, qui diversi casus specierum varietatem constituent.

18. Ex æquatione porro intelligitur, quia formam suam non mutat, si coordinatæ x & y ambæ negativæ statuantur, curvam circa A ramos habere similes & æquales A M C & A m c alternatim dispositos; ita ut in A sit punctum flexus contrarii; unde cognita curvæ portione A M C, simul ejus continuatio A m c ultra A cognoscetur, quippe quæ illi est similis & æqualis. Sic sumpta $A p = AP$, erit quoque $pm = PM$. Recedendo autem ab A, curva utrimque magis ab axe reclinatur, donec sumpta abscissa $= AE = c$, applicata E C curvam tangat; namque posito $x = c$, fit $\frac{dy}{dx} = \infty$. Perspicuum autem est abscissam x ultra $AE = c$ excrescere non posse; alioquin enim fieret $\frac{dy}{dx}$ imaginarium; hinc ergo tota curva continebitur inter applicatas extremas E C & e c, ultra quos cancellos egredi non queat. Jam ergo generatim cognitos habemus binos curvæ ramos A C & A c utrimque ab A usque ad cancellos protensos.

19. Videamus ergo quonam cursu curva ultra C & c progrediatur. Hunc in finem sumamus rectam C D ipsi A E parallelam pro axe, ac ponamus has novas coordinatas $CQ = t$, $QM = u$; eritque $t + x = AE = CD = c$; & $y + u = CE = AD = b$; unde fit $x = c - t$ & $y = b - u$, seu $dy = -du$. His valoribus substitutis, orietur æquatio pro curva inter coordinatas $CQ = t$ & $QM = u$, quæ erit $du = \frac{(aa - 2ct + tt)\,dt}{\sqrt{t(2c - t)(2aa - 2ct + tt)}}$. Hic primum patet, si sumatur t infinite parvum, fore $du = \frac{aa\,dt}{2a\sqrt{ct}}$, ideoque $u = a\sqrt{\frac{t}{c}}$; quæ æquatio indicat curvam ultra C simili modo ver-

ſus N progredi incipere, quo ex C ad M extenditur. Ambiguitas autem ſigni √ in denominatore æquationis luculenter declarat, applicatam *x* æque negative accipi poſſe atque affirmative: unde manifeſtum eſt, rectam CD eſſe curvæ diametrum, atque adeo arcum CNB ſimilem & æqualem fore arcui CMA.

20. Simili autem modo recta cd, ex altera parte axi AE per c parallela ducta, erit curvæ diameter; propterea quod ramus Acb ſimilis & æqualis eſt ramo ACB. In punctis ergo B & b, erunt quoque puncta flexus contrarii omnino uti in A; unde curva ſimiliter ulterius progredietur. Habebit ergo curva infinitas diametros CD, cd, &c. intervallo eodem Dd a ſe invicem diſtantes ac parallelas inter ſe; hancque ob rem curva conſtabit ex infinitis partibus inter ſe ſimilibus & æqualibus; atque ideo tota curva cognoſcetur, ſi unica tantum portio AMC fuerit perſpecta.

21. Quia in A eſt punctum flexus contrarii, ibidem erit radius oſculi infinite magnus; id quod ex ipſa curvæ natura patet. Cum enim curva in A ſollicitetur a vi $= \frac{2Ekk}{aa}$ in directione AD; erit in quovis loco M, ſi radius oſculi ibi ponatur $= R$, ex natura elaſticitatis $\frac{2Ekk}{aa} x = \frac{Ekk}{R}$; unde fit $R = \frac{aa}{2x}$. In puncto ergo A radius oſculi eſt infinitus; at vero in punctis C, c, ob $AE = Ae = c$, erit radius oſculi $= \frac{aa}{2c}$; in his ſcilicet locis maxime a recta BAb remotis curvatura eſt maxima.

22. Etſi autem pro puncto C conſtat abſciſſa $AE = c$ tamen diſtantia EC niſi per integrationem æquationis $dy = \frac{(aa - cc + xx)\,dx}{\sqrt{(cc - xx)(2aa - cc + xx)}}$ definiri non poteſt. Si enim poſt integrationem ponatur $x = c$; valor ipſius *y* dabit diſtantiam CE, quæ bis ſumpta præbebit diſtantiam AB, ſeu intervallum Dd, inter diametros interjacens. Simili modo inte-

Digitized by Google

integratione opus erit ad laminæ incurvatæ AC longitudinem determinandam. Cum enim posito arcu AM $=$ s, sit $ds = \frac{aa\,dx}{\sqrt{(cc-xx)(2aa-cc+xx)}}$, hujus integrale, posito $x = c$, dabit longitudinem curvæ AC.

23. Cum autem istæ formulæ integrationem non admittant; per approximationem valores intervalli AD & arcus curvæ AC commode exprimere nitamur. Ponamus in hunc finem $\sqrt{(cc-xx)} = z$; eritque $PM = y = \int \frac{(aa-zz)\,dx}{z\sqrt{(2aa-zz)}}$, & $AM = s = \int \frac{aa\,dx}{z\sqrt{(2aa-zz)}}$. Est vero per seriem $\frac{1}{\sqrt{(2aa-zz)}}$

$$= \frac{1}{a\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{4}\times\frac{zz}{aa} + \frac{1.3}{4.8}\times\frac{z^4}{a^4} + \frac{1.3.5}{4.8.12}\times\frac{z^6}{a^6} + \text{&c.}\right);$$

unde fiet

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}}\int dx\left(\frac{z}{a} + \frac{1}{4}\times\frac{z}{a} + \frac{1.3}{4.8}\times\frac{z^3}{a^3} + \frac{1.3.5}{4.8.12}\times\frac{z^5}{a^5} + \text{&c.}\right)$$

$$s-y = \frac{1}{\sqrt{2}}\int dx\left(\frac{z}{a} + \frac{1}{4}\times\frac{z^3}{a^3} + \frac{1.3}{4.8}\times\frac{z^5}{a^5} + \frac{1.3.5}{4.8.12}\times\frac{z^7}{a^7} + \text{&c.}\right).$$

24. Quia autem hæc integralia tantum pro casu $x = c$ desideramus; quo casu fit $z = 0$, ea commode ope peripheriæ Circuli exprimi poterunt. Posita enim ratione diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$, erit $\int \frac{dx}{z} = \int \frac{dx}{\sqrt{(cc-xx)}} = \frac{\pi}{2}$; posito post integrationem $x = c$. Pari modo autem sequentia integralia ita determinabuntur, ut sit

$$\int z\,dx = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\,cc$$

$$\int z^3\,dx = \frac{1.3}{2.4}\times\frac{\pi}{2}\,c^4$$

$$\int z^5\,dx = \frac{1.3.5}{2.4.6}\times\frac{\pi}{2}\,c^6$$

$$\int z^7\,dx = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.6}\times\frac{\pi}{2}\,c^8$$

&c.

His ergo integralibus in subsidium vocatis, erit:

$$AC = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1.1}{2.2}\times\frac{cc}{2aa} + \frac{1.1.3.3}{2.2.4.4}\times\frac{c^4}{4a^4} + \&c.\right)$$

$$AC - AD = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(\frac{cc}{2aa} + \frac{1.3}{2.4}\times\frac{c^4}{4a^4} + \frac{1.3.3.5}{2.4.4.6}\times\frac{c^6}{8a^6} + \&c.\right).$$

Ex his ergo reperiuntur AD & AC ut sequitur:

$$AC = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\times\frac{cc}{2aa} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\times\frac{c^4}{4a^4} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\times\frac{c^6}{8a^6} + \&c.\right)$$

$$AD = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1^2}{2^2}\times\frac{3}{1}\times\frac{cc}{2aa} - \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\times\frac{5}{3}\times\frac{c^4}{4a^4} - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\times\frac{7}{5}\times\frac{c^6}{8a^6} - \&c.\right).$$

Si itaque detur $AE = c$, & $AD = b$, ex his æquationibus & recta constans a & longitudo curvæ AC definietur. Vicissim autem ex data longitudine curvæ AC, & recta a, per quam vis inflectens determinatur, reperiri poterunt rectæ AD & CD.

Species prima.

25. Quoniam igitur speciem primam constituimus, si in æquatione generali $dy = \frac{(aa - cc + xx)\,dx}{\sqrt{(cc - xx)(2aa - cc + xx)}}$ fuerit $c = 0$, seu $\frac{a}{c} = \infty$, quo casu linea resultat repræsentans statum laminæ Elasticæ naturalem; ad eandem speciem primam referamus quoque eos casus, quibus c est quantitas quamminima, ita ut præ a pro evanescente haberi queat. Quia ergo x ipsam c superare nequit; etiam x præ a evanescet, ideoque ista prodibit æquatio $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2(cc - xx)}}$, cujus integrale est $y = \frac{a}{\sqrt{2}}$ Asin. $\frac{x}{c}$, quæ est æquatio pro curva Trochoide in infinitum elongata. Fiet autem $AD = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$, a qua ipsa curvæ longitudo infinite parum tantum discrepat, propterea quod angulus DAM est infinite parvus. Sit longitudo laminæ ACB $= 2f$, ejusque elasticitas absoluta $= Ekk$; ob $f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$, erit vis ad hanc curvaturam infinite parvam laminæ inducendam requi-

requisita finitæ magnitudinis & quidem $= \frac{Ekk}{ff} \times \frac{\pi\pi}{4}$. Scilicet si extremitates A & B colligentur filo AB, hoc filum contrahi debebit vi $= \frac{Ekk}{ff} \times \frac{\pi\pi}{4}$.

26. Secundam speciem constituat casus, quo $c > 0$, attamen $c < a$; scilicet si c contineatur intra limites 0 & a. His enim casibus angulus DAM recto erit minor; est namque anguli PAM sinus, seu anguli DAM cosinus $= \frac{aa - cc}{aa}$. Hoc ergo casu, forma lineæ curvæ talis fere erit qualem Figura 6, repræsentat. Quia igitur est $c < a$ erit $\frac{cc}{2aa} < \frac{1}{2}$; cum vero sit $\frac{cc}{2aa} > 0$, erit utique $AC = f > \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$ unde $aa < \frac{8ff}{\pi\pi}$; quare vis, qua extremitates laminæ A & B ope fili AB ad se invicem attrahuntur, major erit quam casu præcedente, nempe $> \frac{Ekk}{ff} \times \frac{\pi\pi}{4}$. *Species secunda.*

27. In tertia specie unicum complector casum, quo $c = a$, quia hoc casu axis AP curvam in puncto A tangit: hæcque species singulare nomen curvæ Elasticæ rectangulæ obtinuit. Erit ergo $dy = \frac{xx\,dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$, & $ds = \frac{aa\,dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$; hoc igitur casu AD & AC ita se habebunt ut sit: *Species tertia.*

$$AC = f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2} \times \frac{1}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \times \frac{1}{4} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \times \frac{1}{8} + \&c.\right)$$

$$AD = b = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1^2}{2^2} \times \frac{3}{1.2} - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \times \frac{5}{3.4} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \times \frac{7}{5.8} - \&c.\right).$$

Quanquam autem hinc, neque b, neque f per a accurate assignari potest; tamen alibi insignem relationem inter has quantitates locum habere demonstravi. Scilicet ostendi esse $4bf = \pi aa$, seu rectangulum ex AD & AC formatum erit æquale areæ Circuli cujus diameter est $=$ AE. Reperietur autem, calculum subducendo, proxime $f = \frac{5a}{6} \times \frac{\pi}{2}$, ita ut sit $a = \frac{12f}{5\pi}$; hinc vis

qua laminæ extremitates A, B ad se invicem contrahi debent; erit $= \frac{Ekk}{ff} \times \frac{15}{16}\pi\pi$. Propius vero repetitur $f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$. 1, 1803206, hincque $b = \frac{\pi aa}{4f} = \frac{a}{\sqrt{2}} \times 1, 1803206$; unde in numeris puris erit $\frac{f}{a} = 1, 311006$, & $\frac{b}{a} = 0, 834612$.

Species quarta

28. Si $c > a$, orietur species quarta, eousque patens, quoad fiat $AD = b = 0$; qui alter limes ipsius c definietur per hanc æquationem:

$$1 = \frac{1^2}{2^2} \times \frac{2}{1} \times \frac{cc}{2aa} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \times \frac{2}{3} \times \frac{c^4}{4a^4} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \times \frac{2}{5} \times \frac{c^6}{8a^6} + \&c.$$

Fig. 7. In hac ergo specie cum sit $c > a$; curva in A supra axem AE ascendet, angulumque constituet PAM, cujus sinus erit $= \frac{cc - aa}{aa}$; mox autem videbimus hunc angulum PAM minorem esse quam 40°, 41′; quoniam si hunc valorem acquirit, intervallum AD evanescit, quem casum ad speciem quintam refero. Hinc in specie quarta continentur casus quibus $\frac{cc}{aa}$ inter hos limites 1 & 1, 651868 comprehenditur. Harum autem curvarum forma ex figura intelligitur; dummodo notetur, quo propius $\frac{cc}{aa}$ ad posteriorem limitem 1, 651868 accesserit, eo minus esse futurum intervallum AD, eoque propius laminæ terminos A & B ad se invicem adduci. Fieri ergo potest ut laminæ gibbositates m & R, item M & r, se mutuo non solum tangant, sed etiam intersecent, atque hujusmodi intersectiones in infinitum multiplicabuntur, donec omnes diametri DC, dc coincidant, atque cum axe AE confundantur.

Species quinta. Fig. 8.

29. Hoc si evenerit, orietur species quinta, cujus natura hac exprimetur æquatione inter coordinatas $AP = x$ & $PM = y$; $dy = \frac{(cc - aa - xx)\,dx}{\sqrt{(cc - xx)(2aa - cc + xx)}}$, existente hac inter a & c relatione, ut sit intervallum $AD = b = 0$. Ponatur

$\frac{cc}{2aa}$

$\frac{cc}{2aa} = v$, atque v ex hac æquatione infinita definiri debet

$$1 = \frac{1.3}{2.2}v + \frac{1.1.3.5}{2.2.4.4}v^2 + \frac{1.1.3.3.5.7}{2.2.4.4.6.6}v^3 + \&c.$$

Quærantur primum per methodos cuique solitas, vel saltem tentando, limites inter quos verus valor ipsius v contineatur, atque hujusmodi limites reperientur $v = 0,824$ & $v = 0,828$. Quod si jam uterque substituatur in æquatione ex erroribus binis oriundis, concludetur tandem fore $v = 0,825934 = \frac{cc}{2aa}$; unde fit $\frac{cc}{aa} = 1,651868$ & $\frac{cc-aa}{aa} = 0,651868$; quæ expressio cum sit sinus anguli PAM, ex Tabulis reperietur hic angulus $= 40°, 41'$; ideoque hujus duplum, seu angulus MAN, erit $= 81°, 82'$. Quare si laminæ elasticæ extremitates eousque ad se invicem adducantur, ut se contingant; tum curvam AMCNA formabunt, & ambæ extremitates in A angulum constituent $= 81°, 22'$.

30. Si ambæ extremitates laminæ A & B, postquam ad se invicem fuerint adductæ, aucta vi in plagas contrarias a se invicem diducantur; orietur curva hujus formæ AMCNB, quæ speciem sextam constituat. In curvis ergo ad hanc speciem pertinentibus, erit $\frac{cc}{2aa} > 0,825934$; ita tamen ut sit $\frac{cc}{2aa} < 1$. Quod si enim sit $cc = 2aa$ orietur species septima mox explicanda. Erit ergo in his curvis angulus PAM, quem curva in A cum axe constituit major quam $40°, 41'$, minor tamen recto: cum enim ejus sinus sit $= \frac{cc-aa}{aa}$, ob $cc < 2aa$, sinus iste necessario est minor sinu toto; neque ergo angulus PAM rectus fieri potest, nisi ponatur $cc = 2aa$. *Speciès sexta.* *Fig. 9.*

31. Sit jam $cc = 2aa$, quo casu species septima constituitur, atque natura curvæ exprimetur hac æquatione *Species septima.*

$$dy = \frac{(aa - xx)\,dx}{x\sqrt{(2aa - xx)}};$$

ex qua colligitur, curvæ ramos A & B infinitum extendi ita, ut recta AB fiat curvæ asymtota. *Fig. 10.* Fiet ergo uterque ramus AMC & BNC infinitus, id quod ex

seric-

ſerie ſupra pro arcu AC inventa intelligitur; erit enim $AC = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \text{&c.}\right)$, cujus ſeriei ſumma eſt infinita. Quod ſi igitur laminæ longitudo AC fuerit finita $= f$, neceſſe eſt ut ſit $a = 0$, hincque etiam $CD = c = 0$; lamina ergo, poſtquam in nodum fuerit incurvata, hoc caſu iterum in directum extendetur, ad quam extenſionem opus erit vi infinita. Sin autem lamina fuerit infinite longa, curvam formabit nodatam ad aſymtotam AB convergentem, exiſtente $CD = c$. Æquatio autem pro hac curva ope logarithmorum integrari poteſt, obtinebitur enim

$$y = \sqrt{(cc - xx)} - \frac{c}{2} l^{c} \frac{+\sqrt{(cc - xx)}}{x},$$

ſumptis abſciſſis x in ipſa diametro DC; ita ut ſit $DQ = x$, & $QM = y$; evaneſcit enim applicata y, poſito $x = CD = c$. In nodo autem O applicata y pariter evaneſcit: ad quem locum inveniendum, ponatur $\frac{2\sqrt{(cc - xx)}}{c} = l^{c} \frac{+\sqrt{(cc - xx)}}{x}$. Sit φ angulus cujus coſinus $= \frac{x}{c}$ & ſinus $= \frac{\sqrt{(cc - xx)}}{c}$, erit $2 \text{ſin.} \varphi = l \text{ tang.} (45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$, qui logarithmus ex hyperbolicorum genere ſumi debet; cujuſmodi Canon ſi deficiat, ſumatur ex Canone vulgari logarithmus tangentis anguli $45^\circ + \frac{1}{2}\varphi$, a cujus characteriſtica denarius auferatur, ſitque reliduum $= \omega$; quo facto erit $2 \text{ſin.} \varphi = \omega . 2,30258509$: ſumendis ergo iterum logarithmis vulgaribus, erit $l2 + l \text{ſin.} \varphi = l\omega + 0,3622156886$, ſeu $l \text{ſin.} \varphi = l\omega + 0,0611856930$. Hoc artificio tentando, mox vero proximus valor anguli φ elicietur; unde porro per regulam falſi verus valor anguli φ, ex eoque abſciſſa $x = DO$ definietur. Reperitur autem hoc modo angulus $\varphi = 73^\circ, 14', 12''$, unde prodit $\frac{x}{c} = 0,2884191$, & $\frac{\sqrt{(cc - xx)}}{c} = 0,9575042$; angulus vero QOM fit $= 2\varphi - 90 = 56^\circ, 28', 24''$, ideoque angulus $MON = 112^\circ, 56', 48''$. Cum igitur ſpecie quinta angulus nodi eſſet $81^\circ, 22'$, in

in ſpecie ſexta angulus nodi MON continebitur inter limites 81°, 22′ & 112°, 56′, 48″. In ſpecie quarta autem ſiquidem detur nodus, erit ejus angulus minor quam 81°, 22′.

32. Sit jam $cc > 2aa$, puta $cc = 2aa + gg$; erit æquatio pro curva, ob $aa = \frac{cc - gg}{2}$ *Species octava.*

$dy = \frac{(xx - \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}gg)\,dx}{\sqrt{(cc - xx)(xx - gg)}}$, qua æquatione ſpecies octava continetur, eritque, ſi recta dDd repræſentet directionem vis ſollicitantis, $x = DQ$ & $y = QM$. Primum ergo patet applicatam y realem eſſe non poſſe, niſi ſit $x > g$, tum vero x non poteſt excedere rectam $DC = c$, unde ſumpta $DF = g$, tota curva continebitur inter rectas ipſi dd parallelas per puncta C & F ductas, quæ curvam ſimul tangent. Perinde autem eſt utra rectarum c & g ſit major, dummodo fuerint inæquales; æquatio enim non variatur ſi rectæ c & g inter ſe permutentur. Deinde vero hæc curva quoque habebit infinitas diametros inter ſe parallelas DC, dc, dc, & quæ per ſingula puncta G & H ducuntur rectæ pariter ad dDd normales; nuſquam autem per totam curvam dabitur punctum flexus contrarii, ideoque continua curvatura utrimque in infinitum progreditur, uti figura indicat; anguli autem qui in nodis conſtituuntur MON majores erunt quam 112°, 56′, 42″. *Fig. 11.*

33. Cum in hac ſpecie non ſolum contineantur caſus quibus $gg < cc$, ſed etiam quibus $gg > cc$, unicus adhuc ſupereſt caſus quo $c = g$, quo quidem tota curva in ſpatium evaneſcens, ob $CF = 0$, redigitur. Quod ſi autem utramque c & g ſtatuamus infinitam, ita tamen ut earum differentia fiat finita, curva finitum ſpatium occupabit. Ad eam ergo inveniendam, ponatur $g = c - 2b$, & $x = c - b - t$, atque ob $c = \infty$, quantitates b & t vero finitæ, erit $\frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}gg = cc - 2cb$; & $xx - \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}gg = -2ct$; tum vero $cc - xx = 2c(b + t)$, & $xx - gg = 2c(b - t)$; ex quibus ſequens prodibit æquatio, $dy = \frac{t\,dt}{\sqrt{(bb - tt)}}$, pro Circulo. Lamina *Species nona.*

elaſtica ergo hoc caſu in Circulum incurvatur, uti ſuprà jam annotavimus; Circulus ergo ſpeciem nonam atque ultimam conſtituet.

34. His enumeratis ſpeciebus, facile erit pro quovis caſu oblato aſſignare, ad quamnam ſpeciem curva formata pertineat. Sit
Fig. 12. lamina elaſtica in G muro infixa, termino vero A appendatur pondus P, quo lamina in figuram GA incurvetur. Ducatur tangens AT, atque ex angulo TAP totum judicium erit petendum. Si enim hic angulus fuerit acutus, referetur curva ad ſpeciem ſecundam; ſin ſit rectus ad tertiam, eritque elaſtica rectangula. Quod ſi angulus TAP fuerit obtuſus, minor tamen quam 130°, 41′, curva ad ſpeciem quartam pertinebit; ad quintam autem ſi angulus TAP ſit = 130°, 41′; ſin autem angulus TAP major fuerit, curva ſub ſpecie ſexta continebitur. Ad ſeptimam vero pertineret, ſi iſte angulus fieret duobus rectis æqualis; quod autem nunquam fieri poteſt. Hæc igitur ſpecies cum duabus ſequentibus produci nequit laminæ immediate pondus appendendo.

Fig. 3. 35. Ut igitur pateat quomodo reliquæ ſpecies laminam incurvando produci queant, laminæ in B fixæ, non immediate, ſed virgæ rigidæ AC cum laminæ termino A firmiſſime connexæ in C appendatur pondus P, quod trahat in directione CD. Sit intervallum $AC = b$, elaſticitas laminæ abſoluta $= Ekk$, & anguli MAP quem lamina in A cum horizontali conſtituit, ſinus $= m$. His poſitis, ſi ponatur abſciſſa $AP = t$ & applicata $PM = y$, reperietur pro curva iſta æquatio

$$dy = \frac{dt(mEkk - Pbt - \frac{1}{2}Ptt)}{\sqrt{(E^2k^4 - (mEkk - Pbt - \frac{1}{2}Ptt)^2)}}.$$

Ponatur jam $CP = x = b + t$, quo æquatio ad formam qua in diviſione ſpecierum uſi ſumus, reducatur; erit

$$dy = \frac{dx(mEkk + \frac{1}{2}Pbb - \frac{1}{2}Pxx)}{\sqrt{(E^2k^4 - (mEkk + \frac{1}{2}Pbb - \frac{1}{2}Pxx)^2)}}.$$

quæ comparata cum forma

$$dy = \frac{dx(aa - cc + xx)}{\sqrt{(cc - xx)(2aa - cc + xx)}}.$$

ſeu

seu $dy = \frac{dx(aa - cc + xx)}{\sqrt{(a^4 - (aa - cc + xx)^2)}}$ dabit $\frac{1}{2} Paa = Ekk$, seu $aa = \frac{2Ekk}{P}$; & $\frac{1}{2} Pcc - \frac{1}{2} Paa = mEkk + \frac{1}{2} Phh$; ergo $cc = \frac{2(1+m)Ekk}{P} + hh$.

36. Curva ergo ad speciem secundam pertinebit, si fuerit $\frac{2mEkk}{P} + hh < 0$, seu $P < \frac{-2mEkk}{hh}$: nisi ergo angulus PAM sit negativus, vis P negativa esse atque virga in C sursum trahi debet. Ad speciem tertiam curvatura pertinebit, si $P = \frac{-2mEkk}{hh}$. Quarta autem species prodibit si fuerit $2mEkk + Phh > 0$, simul vero $2mEkk + Phh < 2aEkk$, existente $a = 0.651868$. Sin autem sit $P = \frac{2(a-m)Ekk}{hh}$, tum curva ad speciem quintam pertinebit. Quod si vero fuerit $Phh > 2(a - m)Ekk$, simul vero $Phh < 2(1 - m)Ekk$, curva ad speciem sextam est referenda. Septimaque species proveniet, si $Phh = 2(1 - m)Ekk$. Octava autem species obtinebitur, si $Phh > 2(1 - m)Ekk$; quare si angulus PAM fuerit rectus, ob $1 - m = 0$, curva semper ad speciem octavam pertinebit. Species denique nona orietur, si fuerit $h = \infty$; uti jam supra annotavi.

37. Quæ ante de specie prima sunt annotata inservire possunt viribus columnarum dijudicandis. Sit enim AB columna super basi A verticaliter posita, gestans pondus P. Quod si jam columna ita sit constituta ut prolabi nequeat; ab onere P, si fuerit nimis magnum, nil aliud erit metuendum, nisi columnæ incurvatio; hoc ergo casu columna spectari poterit tanquam elasticitate prædita. Sit igitur elasticitas absoluta columnæ $= Ekk$: ejusque altitudo $AB = 2f = a$, atque supra §. 25 vidimus, vim requisitam ad hanc columnam vel minimum inclinandam esse $= \frac{\pi\pi Ekk}{4ff} = \frac{\pi\pi}{aa} . Ekk$. Nisi ergo onus gestandum P majus

De vi Columnarum. *Fig.* 13.

sit quam $E.\frac{\pi\pi kk}{aa}$, nulla prorsus incurvatio erit metuenda; contra vero si pondus P fuerit majus, columna incurvationi resistere non poterit. Manente autem elasticitate columnæ, atque adeo ejus crassitie eadem; pondus P, quod sine periculo gestare valet, erit reciproce ut quadratum altitudinis columnæ: columnaque duplo altior quartam tantum oneris partem gestare poterit. Hæc igitur præcipue in usum vocari possunt circa columnas ligneas, quippe quæ incurvationi sunt obnoxiæ.

Elasticitatis absolutæ determinatio per experimenta. Fig. 14.

38. Quo autem vis atque incurvatio cujusque laminæ elasticæ a priori determinari queat; necesse est ut elasticitas absoluta, quam hactenus per Ekk expressimus, sit cognita; id quod unico experimento commode præstabitur. Infigatur lamina elastica uniformis FH, cujus elasticitatem absolutam investigari oportet, altero termino F parieti firmo GK; ita ut situm teneat horizontalem FH; hic enim gravitatem naturalem negligere liceat. Alteri termino H appendatur pondus pro arbitrio sumptum P, quo lamina in statum AF incurvetur. Sit longitudo laminæ $AF = HF = f$, recta horizontalis $AG = g$, & verticalis $GF = b$; qui valores omnes per experimentum erunt cogniti. Comparetur jam hæc curva cum æquatione generali

$$dy = \frac{(cc - aa - xx)\,dx}{\sqrt{(cc - xx)(2aa - cc + xx)}}$$

in qua si fuerint a & c per f, g, b, definita; erit vis incurvans $P = \frac{2Ekk}{aa}$; ideoque elasticitas absoluta $Ekk = \frac{1}{2}Paa$.

39. Quia jam tangens in F est horizontalis, erit hic $\frac{dy}{dx} = 0$; ideoque $x = \sqrt{cc - aa}$. Hinc ergo erit $AG = g = \sqrt{(cc - aa)}$, & $aa = cc - gg$; ideoque

$$dy = \frac{(cc - xx)\,dx}{\sqrt{(cc - xx)(cc - 2gg + xx)}}$$

posito autem hic $x = g$, fieri debebit $y = GF = b$, seu $s = AF = f$; est vero $ds = \frac{(cc - gg)\,dx}{\sqrt{(cc - xx)(cc - 2gg + xx)}}$.

Jam si pondus P sumatur valde parvum, ut lamina paulisper

per tantum deprimatur; tum erit c quantitas valde magna, ideoque erit proxime $\frac{1}{\sqrt{(cc-xx)(cc-2gg+xx)}} =$ $(c^4-2ccgg+2ggxx-x^4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{cc}+\frac{gg}{c^4}-\frac{ggxx}{c^6}$ $+\frac{x^4}{2c^6}$, ideoque integrando quoque proxime:

$$s = \frac{(cc-gg)x}{cc}+\frac{(cc-gg)ggx}{c^4}-\frac{(cc-gg)ggx^3}{3c^6}+\frac{(cc-gg)x^5}{10c^6},$$

$$\& y = \frac{ggx}{cc}+\frac{g^4x}{c^4}-\frac{g^4x^3}{3c^6}+\frac{ggx^5}{10c^6}$$
$$-\frac{x^3}{3cc}-\frac{ggx^3}{3c^4}+\frac{ggx^5}{5c^6}-\frac{x^7}{14c^6}.$$

Sit nunc $x = g$, fietque $f = g-\frac{37g^5}{30c^4}$ & $h = \frac{2g^3}{3cc}+\frac{2g^5}{3c^4}$.

Quod ſi ergo recta $FG = h$ in uſum vocetur, erit $cc = \frac{2g^3}{3h}$, & $aa = \frac{g(2gg-3gh)}{3h}$: unde elicitur elaſticitas abſoluta $Ekk = \frac{Pgg(2g-3h)}{6h}$; qui valor a vero vix ſenſibiliter diſcrepabit, dummodo laminæ curvatura non nimis magna inducatur.

40. Hæc autem elaſticitas abſoluta Ekk primum pendet ab natura materiæ, ex qua lamina eſt fabrefacta; unde alia materia magis, alia minus elatere prædita dici ſolet. Secundo quoque ita pendet a laminæ latitudine, ut expreſſio Ekk ubique latitudini laminæ debeat eſſe proportionalis, ſi cetera ſint paria. Tertio verum craſſities laminæ plurimum confert ad valorem ipſius Ekk determinandum, quæ ita comparata eſſe videtur, ut, ceteris paribus, Ekk ſit ut craſſitiei quadratum. Conjunctim ergo tenebit expreſſio Ekk rationem compoſitam ex ratione elateris materiæ, latitudinis laminæ ſimplici, ac duplicata craſſitiei laminæ. Hinc per experimenta quibus latitudinem & craſſitiem

metiri licet, omnium materiarum elasticitates inter se comparari ac determinari poterunt.

De curva lamina elastica inquirendi. *Fig 2.*

41. Quemadmodum igitur hactenus laminæ, cujus curvaturam determinavi, elasticitatem absolutam Ekk per totam longitudinem constantem posui; ita solutio eadem methodo poterit absolvi, si quantitas Ekk utcunque ponatur variabilis. Scilicet si elasticitas absoluta fuerit ut functio quæcunque portionis laminæ AM, quæ functio sit $= S$, posito arcu $AM = s$; atque existente radio osculi in $M = R$; curva AM, quam lamina induit, ita erit comparata, ut in ea, inter omnes alias ejusdem longitudinis, sit $\int \frac{Sds}{RR}$ minimum. Solvetur ergo iste casus per formulam secundam generalem. Sit $dy = pdx$; $dp = qdx$; at $dS = Tds$, atque, inter omnes curvas in quibus est $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ ejusdem magnitudinis, ea determinari debebit, in qua sit $\int \frac{Sqqdx}{(1+pp)^{5:2}}$ minimum. Prior formula $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ dat pro formula differentiali $\frac{1}{dx}\, d.\, \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Altera vero $\int \frac{Sqqdx}{(1+pp)^{5:2}}$ cum $\int Z dx$ comparata dabit $Z = \frac{Sqq}{(1+pp)^{5:2}}$. Cum igitur positum sit $dZ = L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq$, $\Pi = \int [Z]\, dx$, & $d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp$; erit $L d\Pi = \frac{qqTds}{(1+pp)^{5:2}}$; unde $L = \frac{qqT}{(1+pp)^{5:2}}$; $d\Pi = ds = dx\sqrt{(1+pp)}$; ideoque $[Z] = \sqrt{(1+pp)}$, $[M] = 0$, $[N] = 0$, & $[P] = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Deinde vero est $M = 0$, $N = 0$, $P = -\frac{5Sqqpdp}{(1+pp)^{7:2}}$, & $Q = \frac{2Sq}{(1+pp)^{5:2}}$; ita ut sit $dZ = \frac{qqdS}{(1+pp)^{5:2}} + Pdp + Qdq$.

42. Jam sumatur integrale $\int L dx = \int \frac{qqTdx}{(1+pp)^{5:2}} =$

$\int$

$\int \frac{qq\,dS}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$; ſitque H ejus valor, ſi ponatur $x = a$, cujus quidem conſtantis a conſideratio mox ex calculo rurſus evaneſcet. Erit ergo $V = H - \int \frac{qq\,dS}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$: Unde valor differentialis fiet $= -\frac{dP}{dx} - \frac{1}{dx}\,d.\,[P]\,V + \frac{d\,dQ}{dx^2}$. Quamobrem ex his duobus valoribus differentialibus naſcetur hæc æquatio pro curva quæſita

$$\frac{\alpha}{dx}\,d.\,\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = +\frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}\,d.\,[P]\,V - \frac{d\,dQ}{dx^2},$$

quæ integrata dat

$$\frac{\alpha p}{\sqrt{(1+pp)}} + C = P + [P]\,V - \frac{dQ}{dx}, \text{ ſive}$$

$$\frac{\alpha p}{\sqrt{(1+pp)}} + C = \frac{H p}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} \int \frac{qq\,dS}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + P - \frac{dQ}{dx},$$

ubi conſtans H alias determinata in conſtante arbitraria α comprehendi poteſt, quo ipſo conſtans a ex calculo egreditur. Idcirco ergo prodibit hæc æquatio

$$\frac{\alpha p}{\sqrt{(1+pp)}} + C = P - \frac{dQ}{dx} - \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} \int \frac{qq\,dS}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

43. Multiplicetur hæc æquatio per $dp = q\,dx$, atque prodibit:

$$\frac{\alpha p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} + C\,dp = P\,dp - Q\,dq - \frac{p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} \int \frac{qq\,dS}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cum autem ſit $dZ = \frac{qq\,dS}{(1+pp)^{5:2}} + P\,dp + Q\,dq$, erit $P\,dp = dZ - Q\,dq - \frac{qq\,dS}{(1+pp)^{5:2}}$; quo valore ſubſtituto, emerget æquatio integrabilis hæc:

$$\frac{\alpha p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} + C\,dp = dZ - q\,dQ - Q\,dq - \frac{qq\,dS}{(1+pp)^{5:2}} - \frac{p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} \int \frac{qq\,dS}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}},$$

cujus integralis eſt:

$$\alpha\sqrt{(1+pp)} + Cp + \gamma = Z - Qq - \sqrt{(1+pp)} \int \frac{qq\,dS}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}, \text{ ſeu}$$

a

$$\alpha\sqrt{(1+pp)}+\mathfrak{G}p+\gamma=\frac{-Sqq}{(1+pp)^{5:2}}-\sqrt{(1+pp)}\int\frac{aq\,dS}{(1+pp)^{3}}$$

Quo signum integrale tollamus, divisa æquatione per $\sqrt{(1+pp)}$, ea denuo differentietur;

$$\frac{\mathfrak{G}\,dp}{(1+pp)^{3:2}}-\frac{\gamma p\,dp}{(1+pp)^{3:2}}+\frac{2qq\,dS}{(1+pp)^{3}}+\frac{2Sq\,dq}{(1+pp)^{3}}-\frac{6Spqqdp}{(1+pp)^{4}}=0$$

quæ per $\frac{(1+pp)^{3:2}}{2q}$ multiplicatà, præbet:

$$\frac{\mathfrak{G}\,dp}{2q}-\frac{\gamma p\,dp}{2q}+\frac{q\,dS+S\,dq}{(1+pp)^{3:2}}-\frac{3Spq\,dp}{(1+pp)^{5:2}}=0;$$

cujus, ob $dp=q\,dx$ & $dy=p\,dx$, integrale erit

$$\alpha+\tfrac{1}{2}\mathfrak{G}x-\tfrac{1}{2}\gamma y+\frac{Sq}{(1+pp)^{3:2}}=0.$$

At est $\frac{-(1+pp)^{3:2}}{q}=$ radio osculi R; unde constantes $\mathfrak{G}$ & γ duplicando, orietur hæc æquatio $\frac{S}{R}=\alpha+\mathfrak{G}x-\gamma y$; quæ æquatio apprime congruit cum ea, quam altera Methodus directa suppeditat. Exprimet enim $\alpha+\mathfrak{G}x-\gamma y$ momentum potentiæ incurvantis, recta quacunque pro axe assumpta, cui momento utique æqualis esse debet elasticitas absoluta S per radium osculi R divisa. Sic igitur non solum Celeb. BERNOULLII observata proprietas Elasticæ pleniſſime est evicta; sed etiam formularum mearum difficiliorum usus summus in hoc Exemplo est declaratus.

44. Si ergo curva fuerit data, quam lamina inæquabiliter elastica a potentia $CD=P$, sollicitata format; hinc elasticitas absoluta laminæ in quovis loco poterit cognosci. Sumpta enim recta CP, quæ ad directionem vis sollicitantis est normalis, pro axe, ac posita $CP=x$, $PM=y$, arcu curvæ $AN=s$, & radio osculi in $M=R$, ob momentum potentiæ P ad punctum M relatum $=Px$; erit $\frac{S}{R}=Px$; ideoque elasticitas absoluta in puncto M, quæ est S, $=PRx$. Hinc cum,

Fig. 3.

cum, data curva, in ſingulis punctis detur radius oſculi R, elaſticitas abſoluta in quovis loco innoteſcit. Quod ſi ergo materia laminæ, una cum craſſitie, ubique fuerit eadem; latitudo autem ſit variabilis: quia elaſticitas abſoluta latitudini eſt proportionalis, ex curva formata latitudo laminæ in ſingulis locis colligitur.

45. Sit ex lamina elaſtica exciſſa ſingula triangularis fAf, ubique ejuſdem craſſitiei. Quoniam ergo latitudo mm, in quovis loco M, eſt longitudini AM proportionalis; poſita $AM = s$, erit elaſticitas abſoluta in M ut s. Sit ea $= Eks$; atque laminæ termino ff muro horizontaliter infixo, appendatur cuſpidi A pondus P; quo laminæ recta media AF in curvam FmA incurvetur, cujus natura quæritur. Poſitis autem in axe horizontali abſciſſa $Ap = x$, applicata $pm = y$, & arcu $Am = s$; erit $Px = \frac{Eks}{R}$, denotante R radium oſculi in m. Multiplicetur hæc æquatio per dx, & ob $R = \frac{-ds^3}{dx\,ddy}$, poſito dx conſtante, erit $Px\,dx = \frac{-Eks\,dx^2\,ddy}{ds^2}$, ſeu $\frac{Px\,dx}{Ek} + \frac{s\,dx^2\,ddy}{ds^3} = 0$. At, cum ſit $d.\frac{s\,dy}{ds} = \frac{s\,ddy}{ds} - \frac{sdy\,dds}{ds^3} + dy = \frac{sdx^2\,ddy}{ds^3} + dy$, ob $dds = \frac{dy\,ddy}{ds}$, erit $\int \frac{s\,dx^2\,ddy}{ds^3} = \frac{s\,dy}{ds} - y$: unde integrando habebitur $\frac{Pxx}{2Ek} + a = \frac{-s\,dy}{ds} + y$.

46. Sit $dy = p\,dx$, erit $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$, & poſito $\frac{2Ek}{P} = c$, fiet $a + \frac{xx}{c} = y - \frac{sp}{\sqrt{(1+pp)}}$; ideoque erit $\frac{a\sqrt{(1+pp)}}{p} + \frac{xx\sqrt{(1+pp)}}{cp} = \frac{y\sqrt{(1+pp)}}{p} - s$; quæ differentiata dat $\frac{-a\,dp}{pp\sqrt{(1+pp)}} + \frac{2x\,dx\sqrt{(1+pp)}}{cp} - \frac{xx\,dp}{cpp\sqrt{(1+pp)}} = \frac{dv\sqrt{(1+pp)}}{p} - \frac{y\,dp}{pp\sqrt{(1+pp)}} - dx\sqrt{(1+pp)} = \frac{-y\,dp}{pp\sqrt{(1+pp)}}$. Hinc oritur $a - y = \frac{2px\,dx(1+pp)}{c\,dp} - \frac{xx}{c}$. Ponatur dp conſtans,

ac differentiando erit $-pdx = \frac{2pxddx(1+pp)}{cdp} + \frac{2pdx^2(1+pp)}{cdp} + \frac{2xdx(1+3pp)}{c} - \frac{2xdx}{c}$, seu

$0 = cdxdp + 2xddx(1+pp) + 2dx^2(1+pp) + 6pxdx$;

cujus æquationis autem resolutio ulterior non constat. Simplicissima autem pro curva est æquatio hæc $\frac{yds - sdy}{ds} = \frac{Pxx}{2Ek}$; quia enim posito $x = 0$, & y & s evanescere debent, constans a debet esse $= 0$.

De Incurvatione laminarum elasticarum naturaliter non rectarum.

47. Hoc igitur modo curvatura laminæ, sive æqualiter sive inæqualiter elasticæ, determinatur, si ab una potentia sollicitetur; atque, quod præcipue est notandum, si lamina naturaliter fuerit in directum extensa. Quod si enim lamina in statu naturali jam fuerit curva; tum utique a vi sollicitante aliam curvaturam induet; ad quam inveniendam, præter sollicitationem atque elasticitatem, simul figuram ejus naturalem nosse oportet. Sit igitur lamina elastica naturaliter curva B m a, cujus quidem elasticitas sit ubique eadem, $= Ekk$; quæ a vi sollicitante P in figuram B M A incurvetur. Per A ducatur recta C A P ad directionem vis sollicitantis normalis, quæ habeatur pro axe; sitque intervallum A C $= c$, abscissa A P $= x$, applicata P M $= s$; erit momentum vis sollicitantis pro puncto M $= P(c+x)$.

Fig. 16.

48. Sit porro radius oculi curvæ quæsitæ in M $= R$: sumatur in statu naturali arcus a m $=$ A M $= s$, sitque in puncto m radius oculi $= r$; qui ob curvam a m B cognitam dabitur per arcum s. In M ergo, quia curvatura major est, radius oculi R minor est quam r, atque excessus anguli elementaris in M supra angulum in statu naturali erit $= \frac{ds}{R} - \frac{ds}{r}$, qui excessus erit effectus a potentia sollicitante productus. Quamobrem erit $P(c+x) = Ekk\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$; quæ cum r per s detur, erit æquatio pro curva quæsita; quæ autem sic in genere spectata ulterius reduci non potest.

49. Po-

49. Ponamus ergo laminam in ſtatu naturali a m B habere figuram circularem; erit r radius ejus circuli qui ſit $= a$, unde ſit $P(c+x) = Ekk(\frac{1}{R} - \frac{1}{a})$. Multiplicetur hæc æquatio per dx, & integretur; orietur $\frac{P}{Ekk}(\frac{1}{2}xx + cx + f) = -\frac{dy}{ds} - \frac{x}{a}$: quæ æquatio, ſi loco c ſcribatur $c + \frac{Ekk\alpha}{P}$; abibit in $\frac{P}{Ekk}(\frac{1}{2}xx + cx + f) = \frac{-dy}{ds}$: quæ eſt eadem æquatio quam ſupra pro lamina naturaliter recta invenimus. Lamina ergo naturaliter circularis in eaſdem curvas incurvatur, quæ laminæ naturaliter rectæ inducuntur: tantum ſcilicet locus applicationis potentiæ, ſeu intervallum A C $= c$, pro utroque caſu ſecundum datam legem variari debebit. Eædem ergo novem ſpecies curvarum prodibunt pro figuris, quas lamina naturaliter circularis inducere poteſt, quas ſupra numeravimus. Lamina enim circularis, ſi intervallum A C capiatur infinitum, primum in lineam rectam extendi poteſt; tum quæcunque potentia inſuper applicata eundem præſtabit effectum, ac ſi ſola laminæ claſticæ naturaliter rectæ applicaretur.

50. Ponamus autem, quæcunque ſit laminæ figura naturalis, punctum C infinite diſtare; ita ut momentum vis ſollicitantis ubique ſit idem, quod per Ekk diviſum ponatur $= \frac{1}{b}$; eritque $\frac{1}{b} = \frac{1}{R} - \frac{1}{r}$ & $\frac{1}{R} = \frac{1}{b} + \frac{1}{r}$. Hinc fiet $\int \frac{ds}{R} = \frac{s}{b} + \int \frac{ds}{r} =$ amplitudini arcus A M; ſicuti $\int \frac{ds}{r}$ exprimit amplitudinem arcus a m; quemadmodum quidem Celeb. *Joh.* BERNOULLI hoc *amplitudinis* nomine in eximio Tractatu *De motu reptorio* uti eſt ſolitus. Sit igitur $\frac{s}{b} + \int \frac{ds}{r}$ arcus in circulo, cujus radius $= 1$ ſumptus, qui ob r per s datum, quoque in s erit cognitus. Hinc autem reperientur coordinatæ orthogonales x & y, ita ut ſit

$x = \int ds$ sin. $(\frac{s}{b} + \int \frac{ds}{r})$, & $y = \int ds$ cos. $(\frac{s}{b} + \int \frac{ds}{r})$;
unde curva quæsita per quadraturas constrvi poterit.

Fig. 17. 51. Hinc determinari potest figura a m B, quam lamina in situ naturali habere debet, ut a potentia P in directione A P sollicitante in lineam rectam A M B explicetur. Sumpta enim longitudine A M $= s$; erit momentum potentiæ sollicitantis pro puncto M $= Ps$; radius osculi autem in M, per hypothesin, erit infinitus seu $\frac{1}{R} = 0$. Sumpto jam in statu naturali arcu a m $= s$, positoque radio osculi in m $= r$; quia hæc curva convexitate sua rectam A B spectat, in calculo præcedente poni debet r negativum. Hinc erit $Ps = \frac{Ekk}{r}$, seu $rs = kk$; quæ est æquatio naturam curvæ a m B complectens.

52. Cum igitur sit $\frac{1}{r} = \frac{s}{aa}$; erit $\int \frac{ds}{r} = \frac{ss}{2aa}$; seu erit amplitudo arcus a m ut quadratum ipsius arcus. Hinc coordinatæ orthogonales x & y pro hac curva a m B ita definientur, ut sit $x = \int ds$ sin. $\frac{ss}{2aa}$, & $y = \int ds$ cos. $\frac{ss}{2aa}$: Scilicet in circulo, cujus radius $= 1$, abscindi debet arcus $= \frac{ss}{2aa}$, cujus sinus & cosinus ad coordinatas determinandas assumi debent. Ex eo autem quod radius osculi continuo decrescit, quo major capiatur arcus a m $= s$, manifestum est curvam in infinitum non protendi, etiamsi arcus s capiatur infinitus. Curva ergo erit ex spiralium genere, ita ut infinitis peractis spiris in certo quodam puncto tanquam centro convolvatur, quod punctum ex hac constructione invenire difficillimum videtur. Non exiguum ergo analysis incrementum capere existimanda erit, si quis methodum inveniret, cujus ope, saltem vero proxime, valor horum integralium $\int ds$ sin. $\frac{ss}{2aa}$ & $\int ds$ cos. $\frac{ss}{2aa}$ assignari posset, casu quo s ponitur infinitum; quod Problema non indignum videtur, in quo Geometræ vires suas exerceant.

53. Sit

Digitized by

53. Sit $aaa = bb$, & cum fit

$$\text{fin.}\frac{ss}{bb} = \frac{s^2}{b^2} - \frac{s^6}{1.2.3b^6} + \frac{s^{10}}{1.2.3.4.5b^{10}} - \frac{s^{14}}{1.2...7b^{14}} + \&c.$$

$$\text{cof.}\frac{ss}{bb} = 1 - \frac{s^4}{1.2b^4} + \frac{s^8}{1.2.3.4b^8} - \frac{s^{12}}{1.2.3.4.5.6b^{12}} + \&c.$$

coordinatæ x & y curvæ quæsitæ commode per series infinitas exprimi poterunt: erit enim

$$x = \frac{s^3}{1.3b^2} - \frac{s^7}{1.2.3.7b^6} + \frac{s^{11}}{1.2.3.4.5.11b^{10}} - \frac{s^{15}}{1.2....7.15b^{14}} + \&c.$$

$$y = s - \frac{s^5}{1.2.5b^4} + \frac{s^9}{1.2.3.4.9b^8} - \frac{s^{13}}{1.2.3...6.13b^{12}} + \&c.$$

ex quibus seriebus vehementer convergentibus, nisi arcus s assumatur valde magnus, valores coordinatarum x & y vero proxime satis expedite determinari possunt. Verum cujusmodi valores x & y acquirant, si ponatur arcus s infinite magnus, ex his seriebus nullo modo concludi potest.

54. Quoniam igitur positio infiniti loco s facienda maximam parit difficultatem; huic quidem incommodo sequenti modo remedium afferri potest. Ponatur $\frac{ss}{bb} = v$, ut sit $s = b\sqrt{v}$, erit $ds = \frac{b\,dv}{2\sqrt{v}}$ fietque, $x = \frac{b}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{v}}$ fin. v, & $y = \frac{b}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{v}}$ cof. v. Nunc autem dico valores debitos pro x & y, si ponatur $s = \infty$, inventum iri ex his formulis integralibus,

$$x = \frac{b}{2}\int dv\left(\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{(\pi+v)}} + \frac{1}{\sqrt{(2\pi+v)}} - \frac{1}{\sqrt{(3\pi+v)}} + \&c.\right)\text{fin. } v$$

$$y = \frac{b}{2}\int dv\left(\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{(\pi+v)}} + \frac{1}{\sqrt{(2\pi+v)}} - \frac{1}{\sqrt{(3\pi+v)}} + \&c.\right)\text{cof. } v,$$

si post integrationem ponatur $v = \pi$, denotante π angulum duobus rectis æqualem. Hoc ergo modo positio infiniti quidem evitatur, contra vero series infinita

$$\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{(\pi+v)}} + \frac{1}{\sqrt{(2\pi+v)}} - \&c.$$

in calculum introducitur, cujus summa cum adhuc lateat, resolutio hujus nodi maximæ adhuc difficultati est obnoxia.

De Incurvatione laminæ elasticæ in singulis punctis a viribus quibuscunque sollicitatæ.

55. Tradita jam methodo investigandi curvaturam cujusque laminæ elasticæ, si ea ab una vi in dato loco applicata sollicitetur; conveniet quoque curvaturam a pluribus, imo infinitis, potentiis laminæ elasticæ inductam indagare. Quoniam vero nondum constat, cujusmodi expressio his casibus futura sit vel maxima vel minima; methodo utar tantum directa, quo ex ipsa solutione fortasse proprietas ea, quæ est maxima vel minima erui queat. Sit igitur lamina elastica, naturaliter recta, in

Fig. 18. statum A m M redacta, primum a viribus finitis P & Q secundum directiones C E & C F interse normales sollicitantibus, tum vero a viribus infinite parvis singulis laminæ elementis m μ applicatis, & secundum directiones m p & m q illis C F & C F parallelas trahentibus; quibus positis requiritur natura curvæ A m M laminæ inductæ.

56. Sumatur recta F C A producta pro axe, ponatur A C $= c$, & vocetur abscissa A P $= x$, applicata P M $= y$, arcus curvæ A M $= s$, & radius oculi in M $= R$. Sit elasticitas laminæ absoluta constans $= Ekk$; atque summa momentorum ex omnibus viribus sollicitantibus respectu puncti M ortorum æqualis esse debet $\frac{Ekk}{R}$. Primum quidem a vi finita P in directione C E trahente oritur momentum $= P(c + x)$, in eam plagam agens qua vis elastica æquilibratur. Momentum autem ex altera vi Q ortum, nempe Qy in contrariam plagam tendit, ex quo ex viribus finitis P & Q conjunctim oritur momentum $P(c + x) - Qy$. Jam consideretur quodvis elementum laminæ intermedium m μ, cujus respondens abscissa A p ponatur $= \zeta$, & applicata p m $= \eta$, sit autem vis elementum m μ in directione m p urgens $= dp$, & vis urgens in directione m q $= dq$; erit momentum ex his viribus pro puncto M ortum $= (x - \zeta)\,dp - (y - \eta)\,dq$.

57. Ad summam ergo omnium horum momentorum inveniendam, punctum M, ac proinde x & y, tantisper pro constantibus haberi debent, dum solæ coordinatæ ζ & η cum viribus dp & dq tanquam variabiles spectantur. Erit ergo summa momen-

momentorum a viribus arcum Am sollicitantibus ortorum $= xp - \int \zeta\, dp - yp + \int \eta\, dq$; ubi p exprimit summam omnium virium arcum AM in directionibus applicatis pm parallelis sollicitantium, & q summam omnium virium arcum Am in directionibus axi Ap parallelis sollicitantium. At est $\int \zeta\, dp = \zeta p - \int p\, d\zeta$ & $\int \eta\, dq = \eta q - \int q\, d\eta$; unde fit summa momentorum ex viribus arcui Am applicatis ortorum $= (x - \zeta)p + \int p\, d\zeta - (y - \eta)q - \int q\, d\eta$. Promoveatur jam punctum m in M usque, fietque $\zeta = x$, $\eta = y$, & $d\zeta = dx$ atque $d\eta = dy$; unde summa omnium momentorum per totum arcum AM sumptorum erit $= \int p\, dx - \int q\, dy$. Quocirca obtinebitur pro curva quæsita hæc æquatio $\frac{Ekk}{R} = P(a+x) - Qy + \int p\, dx - \int q\, dy$, ubi ergo p exprimit summam omnium virium verticalium seu in directionibus applicatarum MP agentium, & q summam omnium virium horizontalium seu in directionibus MQ axi AP parallelis agentium per totum arcum AM.

58. Si formula $p\, dx$ & $q\, dy$ integrationem non admittant, tum æquatio inventa per differentiationem ab his formulis integralibus liberari debebit, unde habebitur ista æquatio:

$$\frac{-Ekk\, dR}{RR} = P\, dx - Q\, dy + p\, dx - q\, dy.$$

Sin autem nec p nec q per expressiones finitas exhiberi possint, quippe quæ jam exprimunt summas infinitarum virium infinite parvarum, tum per ulteriorem differentiationem valores finiti p & q exterminari debebunt, ut tantum insint dp & dq cum differentio-differentialibus ddp & ddq. Orietur autem, post primam differentiationem, $-Ekk\, d.\, \frac{dR}{RR\, dx} = dp - (Q+q) \times d.\, \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx}\, dq$. Sit $\frac{dy}{dx} = \omega$, eritque denuo æquatione differentiata:

$$-Ekk\, d.\, \frac{d.\, \frac{dR}{RR\, dx}}{d\omega} = d.\, \frac{dp}{d\omega} - 2\, dq - \omega\, d.\, \frac{dq}{d\omega}$$

quæ æquatio ad differentialia quarti ordinis ascendit.

59. Sint

59. Sint laminæ, loco potentiarum verticalium & horizontalium p & q, in ſingulis punctis M applicatæ duæ potentiæ, altera normalis $MN = dv$ & altera tangentialis $MT = dt$. Hinc erit $dp = \frac{dx\,dv}{ds} + \frac{dy\,dt}{ds}$ & $dq = \frac{dx\,dt}{ds} - \frac{dy\,dv}{ds}$, &, ob $dy = \omega dx$ & $ds = dx\sqrt{(1+\omega\omega)}$, habebitur $dp = \frac{dv}{\sqrt{(1+\omega\omega)}} + \frac{\omega\,dt}{\sqrt{(1+\omega\omega)}}$, & $dq = \frac{dt}{\sqrt{(1+\omega\omega)}} - \frac{\omega\,dt}{\sqrt{(1+\omega\omega)}}$: quibus in praeced. §. æquatione ultima ſubſtitutis, proveniet ſequens æquatio,

$$-Ekk\,d.\frac{d.\frac{dR}{RRdx}}{dv} = \frac{-dt}{\sqrt{(1+\omega\omega)}} + \frac{2\omega\,dv}{\sqrt{(1+\omega\omega)}} + \sqrt{(1+\omega\omega)}\,d.\frac{dv}{d\omega},$$

quæ multiplicata per $\sqrt{(1+\omega\omega)}$ fit integrabilis : poſito enim, brevitatis gratia, $z = \frac{dR}{RRdx}$, reperietur integrale,

$$A - t + \frac{dv(1+\omega\omega)}{d\omega} = -Ekk\left(\frac{dz\sqrt{(1+\omega\omega)}}{d\omega} - \frac{\omega z}{\sqrt{(1+\omega\omega)}} + \frac{1}{2RR}\right)$$
$$= -Ekk\left(\frac{1+\omega\omega}{d\omega}\,d.\,\frac{dR}{RRdx\sqrt{(1+\omega\omega)}} + \frac{1}{2RR}\right).$$

Cum vero ſit $R = \frac{-(1+\omega\omega)^{3:2}dx}{d\omega}$, erit $d\omega = \frac{-(1+\omega\omega)^{3:2}dx}{R}$; quo loco $d\omega$ valore ſubſtituto, habebitur :

$$A - t - \frac{R\,dv}{ds} = -Ekk\left(\frac{1}{2RR} - \frac{R}{ds}\,d.\,\frac{dR}{RRds}\right),$$

ob $dx\sqrt{(1+\omega\omega)} = ds$. Quocirca æquatione ordinata, pro curva quæſita orietur hæc æquatio

$$t + \frac{R\,dv}{ds} - A = Ekk\left(\frac{1}{2RR} - \frac{R}{ds}\,d.\,\frac{dR}{RRds}\right).$$

60. Primum quidem manifeſtum eſt, ſi vis elaſtica Ekk evaneſcat, laminam tranſmutari in filum perfecte flexile ; atque hinc in his æquationibus continentur omnes curvæ, quas filum perfecte flexile a viribus quibuſcunque ſollicitatum formare poteſt. Sic ſi filum a propria gravitate tantum deorſum ſollicitatur, erit $q = 0$,

Digitized by Google

$q = 0$, & p exprimet pondus funis AM, eritque ergo $\frac{p\,dx}{dy} = Q =$ conſtanti, facto $P = 0$, quæ eſt æquatio generalis pro omnis generis Catenariis. Sin autem filum perfecte flexile, in ſingulis punctis, a viribus quarum directiones ſunt normales ad ipſam curvam ſollicitetur, ita ut in puncto M filum ſollicitetur ſecundum directionem MN, vi $= dv$; ob $s = 0$, erit $\frac{R\,dv}{ds} = A =$ conſtanti, quæ eſt proprietas generalis curvarum Velariarum, Linteariarum, omniumque in quibus hujuſmodi ſollicitationes locum habent.

De curvatura laminæ elaſticæ a proprio pondere orta.

61. Ad laminas elaſticas autem revertor, de quibus mox iſta quæſtio præ ceteris notatu digna ſe offert, cujuſmodi figuram accipiat lamina elaſtica proprio pondere incurvata. Sit AmM hæc curva quæ quæritur, & quia ſolæ vires verticales a gravitate ortæ urgent, fiet $P = 0$, $Q = 0$, $q = 0$, & p exprimet pondus laminæ AM. Quare ſi F ſit pondus laminæ longitudinis a; quia lamina uniformis aſſumitur, erit $p = \frac{Fs}{a}$; unde curvæ natura hac exprimetur æquatione $\frac{-Ekk\,dR}{RR} = \frac{Fs\,dx}{a}$. Sit amplitudo curvæ $\int \frac{ds}{R} = u$, erit $R = \frac{ds}{du}$, & $dx = ds$ ſin. u; unde, ſumpto elemento ds conſtante, reperietur æquatio $s\,ds$ ſin. $u + \frac{Eakk}{F} \cdot \frac{ddu}{ds} = 0$, quæ autem, quantum primo intuitu patet, ulterius reduci nequit.

62. In primis autem notari meretur curva, quam fluidum altitudinis quaſi infinitæ laminæ elaſticæ inducit. Sit AMB figura hæc quæ quæritur, & poſito AP $= x$, PM $= y$, AM $= s$; elementum Mm in directione normali MN urgebitur vi ipſi ds proportionali; unde erit $dv = n\,ds$, & $dt = 0$. Hinc orietur vis verticalis $dp = n\,dx$, & horizontalis $dq = -n\,dy$; ex quibus ſtatim fit $p = nx$ & $q = -ny$; ideoque in æquatione prima fiet $\frac{Ekk}{R} = P(c + x) - Qy + \frac{1}{2}nxx + \frac{1}{2}nyy$.

Fig. 19.

Coordinatæ vero x & y ita quantitatibus conſtantibus augeri diminuive poſſunt, ut æquatio pro curva hujuſmodi faciem acquirat $xx + yy = A + \frac{B}{R}$. Hæc autem æquatio ſi multiplicetur per $xdx + ydy$, fiet integrabilis; eſt enim $\int \frac{xdx + ydy}{R}$ $= -\int \frac{x + y\omega}{(1+\omega\omega)^{3:2}} d\omega$, [poſito $dy = \omega dx$] $= \frac{y - \omega x}{\sqrt{(1+\omega\omega)}}$ $= \frac{ydx - xdy}{ds}$. Hanc ob rem, poſt integrationem conſtantibus mutatis, prodibit $(xx+yy)^2 = A(xx+yy) + \frac{B(ydx - xdy)}{ds}$ $+C$. Sit $\sqrt{(xx+yy)} = z$ & $y = uz$; erit $x = z\sqrt{(1-uu)}$; unde $ydx - xdy = \frac{-zzdu}{\sqrt{(1-uu)}}$, & $ds = \sqrt{(dz^2 + \frac{zzdu^2}{1-uu})}$. Ergo poſito $\frac{du}{\sqrt{(1-uu)}} = dr$, erit $z^4 - Az^2 - C =$ $\frac{-Bzzdr}{\sqrt{(dz^2 + zzdr^2)}}$; hincque $dr = \frac{du}{\sqrt{(1-uu)}}$ $= \frac{dz(z^4 - Az^2 - C)}{z\sqrt{(B^2zz - (z^4 - Az^2 - C)^2)}}$. Curva hæc ergo, ſi fuerit $A = 0$ & $C = 0$, erit algebraica; habebitur enim hæc æquatio $\frac{du}{\sqrt{(1-uu)}} = \frac{zzdz}{\sqrt{(B^2 - z^4)}} = \frac{3zzdz}{3\sqrt{(a^6 - z^6)}}$, quæ integrata dat A ſin. $u = \frac{1}{3}$ A ſin. $\frac{z^3}{a^3}$, ſeu $\frac{z^3}{a^3} = 3u - 4u^3$ $= \frac{3y}{z} - \frac{4y^3}{z^3}$; unde hæc reſultat æquatio $z^6 = 3a^4yzz - 4a^4y^3$; ſeu, ob $zz = xx + yy$, hæc $x^6 + 3x^4y^2 + 3xxy^4 + y^6$ $= 3a^4xxy - a^4y^3$.

De motu oſcillatorio laminarum elaſticarum.

63. Ex his etiam motus oſcillatorius laminarum elaſticarum utcunque ad motum comparatarum definiri poteſt: quod argumentum profecto digniſſimum primum excolere cœpit Vir Celeb. *Daniel* BERNOULLI, mihique, jam ante complures annos, Problema de oſcillationibus laminæ elaſticæ altero termino parieti firmo infixæ determinandis propoſuit, cujus Solutionem exhibui

exhibui in *Comment. Petropol.* Tomo VII. Ex hoc autem tempore, cum mihi commodius hoc Problema tractare contigit; tum etiam per commercium cum Celeb. BERNOULLIO plures accesserunt aliæ quæstiones & considerationes, quarum enodationem, ob materiæ affinitatem, hic adjungam. Quando autem motus vibratorius est satis promtus, tum simul a lamina vibrante sonus editur, cujus tenor ac relatio ad alios, ope doctrinæ de sonis, ex his principiis determinabitur. Et quoniam sonorum indoles facillime ad experimenta revocatur; hoc ipso consensus calculi cum veritate explorari, atque adeo Theoria confirmari poterit: quo pacto, cognitio nostra circa naturam corporum elasticorum non parum amplificabitur.

64. Primum autem monendum est, hîc tantum circa oscillationes minimas quæstionem instituisse; atque adeo intervallum, per quod lamina inter oscillandum excurrit, esse quasi infinite parvum. Neque vero, hac limitatione, usus & applicatio quicquam diminuitur: non solum enim oscillationes, si per majora spatia fierent, isochronismo destituerentur; sed etiam sonorum distinctorum formatio, ad quam hic potissimum spectamus, minimas oscillationes requirit. Considero igitur hic primum laminam elasticam uniformem naturaliter rectam, cujus alter terminus B pavimento immobili firmiter sit infixus, ita ut lamina sibi relicta situm teneat rectum BA. Sit hujus laminæ longitudo $AB = a$, ejusque elasticitas absoluta in singulis locis $= Ekk$; ab ejus vero pondere vel mentem revocamus, vel infixionem ejusmodi statuimus, ut ejus status a gravitate turbari nequeat. *Fig. 20.*

De oscillationibus laminæ elasticæ altero termino misso infixæ.

65. Jam lamina hæc a vi quacunque impulsa vibrationes peragat minimas, circa statum naturalem BA utrinque excurrendo per minima intervalla Aa. Sitque BMa status quispiam, quem lamina inter oscillandum tenet; qui quoniam infinite parum tantum distat a statu naturali BPA, rectæ MP, Aa simul repræsentabunt vias, quas laminæ puncta M & a percurrunt, vel potius hæ rectæ ad vias veras rationem habebunt a ratione æqualitatis infinite parum discrepantem. Ad motum autem oscillatorium determinandum, absolute necesse est naturam

curvæ BMa; quam lamina inter oſcillandum induit, noſſe. Sit igitur AP $= x$, PM $= y$, arcus aM $= s$, & radius oſculi in M $= R$; & intervallum minimum Aa $= b$; atque, ex conditione memorata, erit arcus s proxime æqualis abſciſſæ x, ac proinde pro ds ſumi poterit dx: præ dx enim evaneſcet dy. Et cum, poſito dx conſtante, ſit generatim radius oſculi $= \frac{ds^3}{dx\,ddy}$, erit præſenti caſu $R = \frac{dx^3}{ddy}$; nam curva BMa convexitatem axi BA obvertit, & quia lamina in B muro firmiter eſt infixa, erit recta AB tangens curvæ in puncto B.

66. His poſitis, tam ad naturam curvæ BMa quam ad ipſum motum oſcillatorium determinandum, ſit f longitudo penduli ſimplicis iſochroni: oſcillationes enim minimas eſſe iſochronas, cum natura rei declarat, tum ipſe calculus inſtituendus monſtrabit. Acceleratio ergo, qua laminæ punctum M verſus P urgetur, erit $= \frac{PM}{f} = \frac{y}{f}$. Quare ſi maſſa totius laminæ ponatur $= M$, quæ per ejus pondus exprimitur; erit elementi Mm $= ds = dx$ maſſa $= \frac{M\,dx}{a}$; unde vis motrix elementum Mm in directione MP ſollicitans erit $= \frac{My\,dx}{af}$; ſicque vires, quibus ſingulæ laminæ particulæ ad motum actu cientur, innotescunt, cum ex ipſa curva BMa, tum ex longitudine penduli ſimplicis iſochroni f. Quoniam vero lamina a vi elaſtica revera ad motum incitatur; ex hac cognita viciſſim & natura curvæ BMa, & longitudo penduli ſimplicis iſochroni determinabitur.

67. Quoniam ergo lamina perinde movetur, ac ſi ſingulis ipſius elementis Mm in directione MP vires eſſent applicatæ $= \frac{My\,dx}{af}$; ſequitur, ſi laminæ ſingulis elementis Mm in directionibus contrariis Mπ æquales vires $\frac{My\,dx}{af}$ applicarentur, laminam in ſtatu BMa æquilibrari. Hinc lamina inter oſcillandum eandem curvaturam ſubibit, quam indueret quieta, ſi in ſingu-

Digitized by Google

singulis punctis M sollicitaretur viribus $\frac{My\,dx}{af}$ in directionibus Mπ. Per regulam ergo supra §. 56 inventam, colligantur omnes hæ vires per arcum aM applicatæ, atque prodibit summa $= \frac{M}{af}\int y\,dx$, quæ ibi in locum ipsius p substitui debet. Quare cum vires reliquæ P, Q, & q, quæ ibi habebantur, evanescant, natura curvæ exprimetur æquatione $\frac{Ekk}{R} = \int p\,dx$: unde habebitur $\frac{Ekk}{R} = \frac{M}{af}\int dx \int y\,dx$. Cum vero sit $R = \frac{dx^2}{d\,dy}$, erit $\frac{Ekk\,d\,dy}{dx^2} = \frac{M}{af}\int dx \int y\,dx$; & differentiando $\frac{Ekk\,d^3y}{dx^2} = \frac{M\,dx}{af} \times \int y\,dx$: denuoque differentiando prodibit ista æquatio differentialis quarti ordinis. $Ekk\,d^4y = \frac{My\,dx^4}{af}$.

68. Hac ergo æquatione & natura curvæ BMa exprimitur, & ex eadem, si ad casum oblatum accommodetur, longitudo f determinabitur; qua cognita, ipse motus oscillatorius innotescet. Ante omnia autem hanc æquationem integrari oportet: quæ cum pertineat ad id æquationum differentialium altiorum graduum genus, cujus integrationem generalem exhibui in *Miscell. Berol.* Volumine VII, hinc sequens æquatio integralis reperietur; ponendo brevitatis ergo $\frac{Ekk.\,af}{M} = c^4$; prodibit scilicet

$$y = Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}} + C\,\text{sin.}\frac{x}{c} + D\,\text{cos.}\frac{x}{c},$$

ubi e denotat numerum cujus logarithmus hyperbolicus est $= 1$; & sin. $\frac{x}{c}$ & cos. $\frac{x}{c}$ denotant sinum & cosinum arcus $= \frac{x}{c}$ in circulo, cujus radius $= 1$, assumpti. Tum vero A, B, C, & D sunt quatuor constantes arbitrariæ per quadruplicem integrationem introductæ, quas ex accommodatione calculi ad præsentem casum definire oportet.

69. Determinatio autem constantium sequenti modo instituetur.

tur. Primum posito $x = 0$, fieri debet $y = b$; hinc ergo oritur ista æquatio, $b = A + B + D$, quæ est *prima*.

Secundo, cum sit $\frac{c^4 d\,dy}{dx^3} = \int dx \int y\,dx$; facto $x = 0$, fieri debet $\frac{d\,dy}{dx^3} = 0$; at est $\frac{d\,dy}{dx^3} = \frac{A}{cc} e^{\frac{x}{c}} + \frac{B}{cc} e^{-\frac{x}{c}} - \frac{C}{cc}$ sin. $\frac{x}{c} - \frac{D}{cc}$ cos. $\frac{x}{cc}$: unde oritur hæc æquatio *secunda*, $0 = A + B - D$.

Tertio, cum sit $\frac{c^4 d^3 y}{dx^3} = \int y\,dx$; posito $x = 0$, simul $\frac{d^3 y}{dx^3}$ evanescere debet: quia ergo erit $\frac{c^4 d^3 y}{dx^3} = A e^{\frac{x}{c}} - B e^{-\frac{x}{c}} - C$ cos. $\frac{x}{c} + D$ sin. $\frac{x}{c}$: prodit æquatio *tertia*, $0 = A - B - C$.

Quarto autem, si ponatur $x = a$, applicata y evanescit, unde obtinebitur æquatio *quarta*, $0 = A e^{\frac{a}{c}} + B e^{-\frac{a}{c}} + C$ sin. $\frac{a}{c} + D$ cos. $\frac{a}{c}$.

Quinto, quia AB est tangens curvæ in puncto B; facto $x = a$, fieri debet $\frac{dy}{dx} = 0$: unde prodit æquatio *quinta*, $0 = A e^{\frac{a}{c}} - B e^{-\frac{a}{c}} + C$ cos. $\frac{a}{c} - D$ sin. $\frac{a}{c}$.

Ex his ergo quinque æquationibus, primum quatuor constantes A, B, C, D definientur; tum vero, in quo cardo rei versatur, determinabitur valor ipsius $c = \sqrt[4]{\frac{Ekk.\,af}{M}}$; ex quo longitudo penduli simplicis isochroni f elicietur; quo ipso, durationes oscillationum cognoscentur.

70. Ex æquationibus secunda & tertia, constantes C & D ex A & B ita definientur, ut sit

$$C = A - B, \text{ \& } D = A + B.$$

qui

qui valores in æquationibus quarta & quinta ſubſtituti dabunt

$$o = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} + (A-B)\text{ſin.}\frac{a}{c} + (A+B)\text{cof.}\frac{a}{c}$$

$$o = Ae^{\frac{a}{c}} - Be^{-\frac{a}{c}} + (A-B)\text{cof.}\frac{a}{c} - (A+B)\text{ſin.}\frac{a}{c};$$

ex quibus eruitur,

$$\frac{A}{B} = \frac{-e^{-\frac{a}{c}} + \text{ſin.}\frac{a}{c} - \text{cof.}\frac{a}{c}}{e^{\frac{a}{c}} + \text{ſin.}\frac{a}{c} + \text{cof.}\frac{a}{c}} = \frac{e^{-\frac{a}{c}} + \text{cof.}\frac{a}{c} + \text{ſin.}\frac{a}{c}}{e^{\frac{a}{c}} + \text{cof.}\frac{a}{c} - \text{ſin.}\frac{a}{c}}$$

unde obtinebitur hæc æquatio,

$$o = 2 + (e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}})\text{cof.}\frac{a}{c},$$

ſeu $e^{\frac{2a}{c}}\text{cof.}\frac{a}{c} + 2e^{\frac{a}{c}} + \text{cof.}\frac{a}{c} = o$,

quæ dat $e^{\frac{a}{c}} = \frac{-1 \pm \text{ſin.}\frac{a}{c}}{\text{cof.}\frac{a}{c}}$. Cum igitur $e^{\frac{a}{c}}$ ſit quantitas affirmativa, coſinus anguli $\frac{a}{c}$ erit negativus; ideoque angulus $\frac{a}{c}$ recto major.

71. Ex hac æquatione intelligitur dari infinitos angulos $\frac{a}{c}$ quæſito ſatisfacientes, ex quibus infiniti diverſi modi oſcillationum ejuſdem laminæ oriuntur. Curva enim in uno pluribuſve punctis axem AB ſecare poteſt, antequam in B axem tangat; ex quo ejuſdem laminæ plures, imo infiniti, oſcillandi modi æque ſunt poſſibiles. Cum igitur hîc inprimis contemplemur caſum, quo B primum eſt punctum, ubi lamina ab axe AB tangitur; huic caſui ſatisfaciet minimus angulus $\frac{a}{c}$ æquationem inven-

inventam reſolvens; qui angulus cum ſit recto major, ponatur $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}\pi + \varphi$; exiſtente φ angulo recto minore. Hinc, ob ſin. $\frac{a}{c}$ = cof. φ, & cof. $\frac{a}{c} = -$ ſin. φ, obtinebitur duplex æquatio,

$$e^{\frac{a}{c}} = \frac{1 \mp \text{cof. } \varphi}{\text{ſin. } \varphi}.$$

quæ præbet, vel $e^{\frac{a}{c}} =$ tang. $\frac{1}{2}\varphi$, vel $e^{\frac{a}{c}} =$ cot. $\frac{1}{2}\varphi$, quarum poſterior minorem dabit valorem pro angulo φ; quæ ergo ad caſum propoſitum erit accommodata.

72. Sequentes poſſibiles oſcillationum modi reperientur, ſi pro $\frac{a}{c}$ ponantur anguli duobus rectis majores, tribus vero minores. Sic poſito $\frac{a}{c} = \frac{3}{2}\pi - \varphi$, erit ſin. $\frac{a}{c} = -$ cof. φ, & cof. $\frac{a}{c} = -$ ſin. φ; unde fit $e^{\frac{a}{c}} = \frac{1 + \text{cof. } \varphi}{\text{ſin. } \varphi}$, ſeu, vel $e^{\frac{a}{c}} =$ tang. $\frac{1}{2}\varphi$, vel $e^{\frac{a}{c}} =$ cot. $\frac{1}{2}\varphi$. Simili modo alii oſcillationum modi reperientur, ponendo $\frac{a}{c} = \frac{5}{2}\pi + \varphi$; $\frac{a}{c} = \frac{7}{2}\pi - \varphi$, &c. Ex quibus omnibus, ſi ſumantur logarithmi hyperbolici, orientur ſequentes æquationes:

I. $\frac{1}{2}\pi + \varphi = l$ cot. $\frac{1}{2}\varphi$; II. $\frac{1}{2}\pi + \varphi = l$ tang. $\frac{1}{2}\varphi$;
III. $\frac{3}{2}\pi - \varphi = l$ cot. $\frac{1}{2}\varphi$; IV. $\frac{3}{2}\pi - \varphi = l$ tang. $\frac{1}{2}\varphi$;
V. $\frac{5}{2}\pi + \varphi = l$ cot. $\frac{1}{2}\varphi$; VI. $\frac{5}{2}\pi + \varphi = l$ tang. $\frac{1}{2}\varphi$;
VII. $\frac{7}{2}\pi - \varphi = l$ cot. $\frac{1}{2}\varphi$; VIII. $\frac{7}{2}\pi - \varphi = l$ tang. $\frac{1}{2}\varphi$;
&c.

Harum autem æquationum tertia congruit cum ſecunda; poſito enim $\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\theta$, ut ſit cot. $\frac{1}{2}\varphi =$ tang. $\frac{1}{2}\theta$; tertia tranſit in $\frac{1}{2}\pi + \theta = l$ tang. $\frac{1}{2}\theta$, quæ eſt ipſa ſecunda. Simili modo quarta congruit cum prima: tum quinta & octava inter ſe con-

congruunt; atque ſexta cum ſeptima. Quamobrem ſequentes tantum prodibunt æquationes diverſæ:

I. $\frac{1}{2}\pi + \varphi = l \cot. \frac{1}{2}\varphi$
II. $\frac{1}{2}\pi + \varphi = l \tang. \frac{1}{2}\varphi$
III. $\frac{3}{2}\pi + \varphi = l \cot. \frac{1}{2}\varphi$
IV. $\frac{3}{2}\pi + \varphi = l \tang. \frac{1}{2}\varphi$
V. $\frac{5}{2}\pi + \varphi = l \cot. \frac{1}{2}\varphi$
VI. $\frac{5}{2}\pi + \varphi = l \tang. \frac{1}{2}\varphi$
&c.

72. Logarithmus autem hyperbolicus tangentis vel cotangentis cujuſpiam anguli reperitur, ſumendo logarithmum Tabularem, indeque auferendo logarithmum ſinus totius, atque reſiduum multiplicando per 2,302585092994; qui labor ut ſubleveturdenuo logarithmis uti conveniet. Sit u logarithmus hyperbolicus tangentis ſeu cotangentis anguli $\frac{1}{2}\varphi$, qui quæritur; ſumatur ex Tabulis logarithmus ejuſdem tangentis cotangentiſve, qui logarithmo ſinus totius multatus ponatur $= v$. Cum ergo ſit $u = 2,302585092994 \times v$; erit, ſumendis logarithmis vulgaribus,

$$lu = lv + 0,3622156886.$$

Hoc logarithmo invento, cum ſit $u = \frac{n}{2}\pi + \varphi$, erit $lu = l\left(\frac{n}{2}\pi + \varphi\right)$. Ad hoc evolvendum, angulus φ in partibus radii exprimi debet, quemadmodum & π eodem modo exprimitur, dum eſt $\pi = 3,1415926535$, ac propterea . . . . $\frac{1}{2}\pi = 1,5707963267$. Angulus autem φ eodem modo exprimetur, ſi is in minuta ſecunda convertatur, atque ab hujus numeri logarithmo ſubtrahatur conſtanter 5,3144251332; ſic enim prodibit $l\varphi$, ex quo ad numeros regrediendo valor ipſius φ eruitur. Erit autem conſtanter pro unoquoque oſcillationum genere $\frac{a}{c} = u = \frac{n}{2}\pi + \varphi$.

74. His circa calculum inſtituendum monitis, per approxi-

mationes valor anguli φ pro quovis oſcillationum genere non difficulter eruetur. Tribuendo enim pro lubitu ipſi φ valores aliquot, & per calculum determinando, & $\frac{n}{2}\pi+\varphi$, & $l \overset{\text{tang.}}{\text{cot.}} \frac{1}{2}\varphi$. mox valor ipſius φ prope verus cognoſcetur. Quod ſi autem habeantur limites anguli φ utcunque remoti, ſtatim invenientur limites propiores, ex hiſque tandem verus valor ipſius φ. Sic pro æquatione prima $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}\pi+\varphi = l \cot. \frac{1}{2}\varphi$, ſequentes limites anguli φ erui $17^\circ, 26', \& 17^\circ, 27'$, ex quibus per ſequentem calculum verus valor ipſius φ obtinebitur.

$\varphi =$	$17^\circ, 26', 0''$	$17^\circ, 27', 0''$
in min. ſec. $=$	$62760''$	$62820''$
log. $=$	4, 7976829349	4, 7980979321
ſubtr.	5, 3144251332	5, 3144251332
$l\varphi =$	9, 4832578017	9, 4836727989
$\varphi =$	0, 3042690662	0, 3045599545
$\frac{1}{2}\pi =$	1, 5707963268	1, 5707963268
$\frac{1}{2}\pi+\varphi =$	1, 8750653930	1, 8753562813
$\frac{1}{2}\varphi =$	$8^\circ, 43', 0''$	$8^\circ, 43', 30''$
$l \cot. \frac{1}{2}\varphi =$	10, 8144034109	10, 8139819342
$v =$	0, 8144034109	0, 8139819342
$lv =$	9, 9108395839	9, 9106147660
add. $=$	0, 3622156886	0, 3622156886
$lN =$	0, 2730552725	0, 2728304546
$u =$	1, 8752331540	1, 8742626675
diff.	$+$ 1677610	$-$ 10936138

Ex his ergo utriuſque limitis erroribus concluditur fore $\varphi = 17^\circ, 26', 7'' \frac{98}{100}$, & $\frac{1}{2}\pi+\varphi$, ſeu $\frac{a}{c} = 107^\circ, 26', 7'' \frac{98}{100}$. Cum vero in minutis ſecundis ſit $\varphi = 62767,98$, erit

$l\varphi =$

Digitized by Google

$$\begin{aligned} 1\Phi &= 4,7977381525 \\ \text{subtr.} &= \underline{5,3144251332} \\ &\quad 9,4833130193 \\ \text{ergo } \Phi &= 0,3043077545 \\ \text{add. } \tfrac{1}{2}\pi &= \underline{1,5707963268} \\ \frac{a}{c} &= 1,8751040813 \end{aligned}$$

quo invento, erit $\frac{A}{B} = \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi = 0,1533390624$. Reperitur ergo ratio conſtantium A & B, ex quibus & ratio reliquarum conſtantium C & D ad illas cognoſcetur.

75. Reſtat adhuc prima æquatio $b = A + B + D$, quæ, ob $D = A + B$, abit in $b = 2A + 2B$; ideoque $A + B = \frac{1}{2}b$: cum ergo ſit $\frac{A}{B} = \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi$, fiet $B(1 + \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi) = \frac{1}{2}b$, & $B = \frac{b}{2 + 2\ \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi}$. Unde ex tang. $\frac{1}{2}\Phi = 0,1533390624$ ſingulæ æquationis conſtantes ſequenti modo determinabuntur :

$$\frac{A}{b} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}\Phi}{2(1 + \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi)} = \frac{0,1533390624}{2,3066781248}$$

$$\frac{B}{b} = \frac{1}{2(1 + \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi)} = \frac{1,0000000000}{2,3066781248}$$

$$\frac{C}{b} = \frac{-1 + \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi}{2(1 + \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi)} = \frac{-0,8466609376}{2,3066781248}$$

$$\frac{D}{b} = \frac{1 + \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi}{2(1 + \text{tang. } \frac{1}{2}\Phi)} = \frac{1,1533390624}{2,3066781248}$$

quibus inventis, natura curvæ aMB, quam lamina inter oſcillandum induit, hac exprimetur æquatione

$$\frac{y}{b} = \frac{A}{b}e^{\frac{x}{c}} + \frac{B}{b}e^{-\frac{x}{c}} + \frac{C}{b}\text{ſin. } \frac{x}{c} + \frac{D}{b}\text{ coſ. } \frac{x}{c}.$$

76. Quod autem ad oſcillationum velocitatem attinet, ea

ex æquatione $\frac{a}{c} = 1,8751040813$ cognoſcetur. Ponatur brevitatis gratia: $n = 1,8751040813$ ut ſit $a = nc$.

Et cum ſit $c^4 = \frac{Ekk.af}{M}$, ubi $\frac{M}{a}$ exprimit gravitatem ſpecificam laminæ, & Ekk elaſticitatem abſolutam; eo modo, quo hactenus ſum uſus, erit $a^4 = n^4 . Ekk. \frac{a}{M} f$, ideoque $f = \frac{a^4}{n^4} \cdot \frac{1}{Ekk} \cdot \frac{M}{a}$, ex quo longitudo penduli ſimplicis iſochroni tenebit rationem compoſitam ex quadruplicata longitudinis laminæ, ſimplici gravitatis ſpecificæ, & inverſa elaſticitatis abſolutæ. Sit g longitudo penduli ſimplicis ſingulis minutis ſecundis oſcillantis, ita ut ſit $g = 3,16625$ ped. Rhenani; quia durationes oſcillationum ſunt in ſubduplicata ratione pendulorum, tempus unius oſcillationis a lamina noſtra elaſtica factæ, erit $= \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{g}}$ ſecund. $= \frac{aa}{nn} \sqrt{\frac{1}{g}} \cdot \frac{1}{Ekk} \cdot \frac{M}{a}$; unde numerus oſcillationum uno minuto ſecundo editarum erit $= \frac{nn}{aa} \sqrt{g} . Ekk. \frac{a}{M}$, qui numerus exprimit ſoni quem lamina excitat tenorem. Soni ergo a diverſis laminis elaſticis uno termino muro infixis editi erunt in ratione compoſita ſubduplicata elaſticitatum abſolutarum directe, inverſa ſubduplicata gravitatum ſpecificarum, & inverſa duplicata longitudinum. Quare ſi duæ laminæ elaſticæ tantum longitudine differant, erunt ſoni reciproce ut quadrata longitudinum; ſcilicet lamina duplo longior edet ſonum duabus octavis graviorem. Corda autem tenſa duplo longior ſonum una tantum octava graviorem edit, ſi tenſio maneat eadem. Ex quo patet ſonos laminarum elaſticarum longe aliam ſequi rationem, atque ſonos cordarum tenſarum.

77. Quod ad naturam curvæ a M B ultra terminos a & B continuatæ attinet, primum quidem patet curvam ultra a divergendo ab axe B A continuato progredi. Poſito enim x negativo fiet

$y =$

Digitized by Google

$$y = B\,e^{\frac{x}{c}} + Ae^{-\frac{x}{c}} - C\,\text{sin.}\,\frac{x}{c} + D\,\text{cos.}\,\frac{x}{c}.$$

Hic jam omnes termini ſunt affirmativi, quia ſolus coefficiens C ante obtinuerat valorem negativum; unde dum creſcit x, etiam y creſcere debet, quia numerus B major eſt quam A; atque adeo terminus $Be^{\frac{x}{c}}$ prævalet. Quam primum autem $\frac{x}{c}$ valorem ſaltem mediocrem eſt adeptum; tum iſte terminus $Be^{\frac{x}{c}}$ tantopere creſcit, ut reliqui termini præ eo quaſi evaneſcant. Ob eandem rationem, quia curvæ in B radius oſculi non eſt $= \infty$; eſt enim $\frac{Ekk}{R} = \frac{M}{af}\int dx \int y\,dx$; curva in B non habebit punctum flexus contrarii, ideoque ad eandem axis AB partem ulterius progredietur; aucta autem abſciſſa x ultra $AB = a$, tum primus terminus $Ae^{\frac{x}{c}}$ mox tam fit magnus, ut reliqui præ eo pro nihilo reputari queant.

78. Hic igitur eſt primus oſcillationum modus inter illos innumerabiles, ad quos eadem lamina ſe componere poteſt. Secundus modus in figura repræſentatus quo lamina in B fixa axem AB in uno puncto O trajicit, deducetur ex æquatione $\frac{a}{c} = \frac{3}{2}\pi + \Phi = l\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi$, ſeu hac $\frac{3}{2}\pi - \Phi = l\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\Phi = \frac{a}{c}$. Hic per nonnulla tentamina inveni angulum Φ contineri intra hos limites, $1^\circ, 2', 40''$ & $1^\circ, 3', 0''$, ex quibus ut ante verus valor ipſius Φ eruetur. *Fig. 21.*

Φ =	1°, 2′, 40″	1°, 3′, 0″
in min. ſec. =	3760″	3780″
log. =	3, 5751878450	3, 5774917998
ſubtr. =	5, 3144251332	5, 3144251332
$l\Phi$ =	8, 2607627118	8, 2630666666
Φ =	0, 0182289944	0, 0183259571
$\frac{1}{2}\pi$ =	4, 7123889804	4, 7123889804
$\frac{a}{c}$ =	4, 6941599860	4, 6940630233
$\frac{1}{2}\Phi$ =	31′, 20″	31′, 30″
l cot. $\frac{1}{2}\Phi$ =	2, 0402552577	2, 0379511745
lv =	0, 3096845055	0, 3091937748
add.	0, 3622156886	0, 3622156886
lu =	0, 6719001941	0, 6714094634
u =	4, 6978613391	4, 6925559924
$\frac{a}{c}$ =	4, 6941599860	4, 6940630233
Error	+37013531	— 15070309

Ex his erroribus concluditur verus valor anguli $\Phi = 1°, 2', 54'' \frac{213}{1000}$, & $\frac{a}{c} = 268°, 57', 5'' \frac{787}{1000}$. Cum igitur ſit $\Phi = 3774, 213''$ erit

$l\Phi$ =	3, 5768264061
ſubtr. =	5, 3144251332
	8, 2624012729
Φ =	0, 0182979009
a $\frac{1}{2}\pi$ =	4, 7123889804
$\frac{a}{c}$ =	4, 6940910795

Sonus ergo laminæ priori modo oſcillantis erit ad ſonum ejuſdem laminæ hoc modo vibrantis, uti eſt quadratum numeri 1, 8751040813 ad quadratum numeri 4, 6940910795, hoc eſt

ut

ut 1 ad 6, 266891, seu in minimis numeris ut 4 ad 25, seu ut 1 ad $6\frac{4}{17}$. Unde sonus posterior erit ad priorem duplex octava cum quinta & cum hemitonio fere.

79. Pro sequentibus oscillationum modis ejusdem laminæ elasticæ, quibus lamina inter oscillandum axem AB in duobus pluribusve punctis intersecat, sit angulus Φ multo minor. Sic pro tertio modo habetur hæc æquatio $\frac{5}{2}\pi + \Phi = l$ cot. $\frac{1}{2}\Phi = \frac{a}{c}$. Cum ergo sit $e^{\frac{5}{2}\pi + \Phi} =$ cot. $\frac{1}{2}\Phi$, ob Φ angulum vehementer parvum, erit $e^{\frac{5}{2}\pi + \Phi} = e^{\frac{5}{2}\pi}(1 + \Phi + \frac{1}{2}\Phi^2 + \frac{1}{6}\Phi^3 +$ &c.) & cot. $\frac{1}{2}\Phi = \frac{1 - \frac{1}{8}\Phi\Phi}{\frac{1}{2}\Phi - \frac{1}{48}\Phi^3} = \frac{2}{\Phi} - \frac{\Phi}{6}$. Hinc erit proxime $e^{\frac{5}{2}\pi} = \frac{2}{\Phi}$; ideoque $\Phi = 2e^{-\frac{5}{2}\pi}$, & propius $\Phi = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}\pi}}$; unde erit $\frac{a}{c} = \frac{5}{2}\pi + \frac{2}{e^{\frac{5}{2}\pi} + 2}$; qui posterior terminus est quàm minimus. Simili modo pro quarto oscillationum modo, erit proxime $\frac{a}{c} = \frac{7}{2}\pi - 2e^{-\frac{7}{2}\pi}$, & ita porro: ob hos alteros terminos evanescentes, ipsius $\frac{a}{c}$ valores erunt $\frac{9}{2}\pi$, $\frac{11}{2}\pi$, &c. qui eo minus a veritate aberrabunt, quo ulterius progredientur.

De oscillationibus laminæ elasticæ liberæ.

80. Considéremus jam laminam elasticam nusquam fixam, sed liberam vel plano politissimo incumbentem, vel remota gravitate, in spatio vacuo versantem. Facile autem patet hujusmodi laminam motum oscillatorium recipere posse, dum lamina acb sese incurvando alternatim cis & ultra statum quietis AB excurrit. Motus igitur iste oscillatorius simili modo, quo in casu præcedente, definiri poterit, dummodo calculus debito modo ad hunc casum accommodetur. Sit igitur acb figura laminæ incurvata quam inter oscillandum obtinet, at ACB sit situs ejusdem laminæ in statu æquilibrii, per quem in quavis oscillatione transit. Ponatur, ut ante, longitudo laminæ AB $= a$, ejus elasticitas absoluta $= Ekk$, atque pondus seu massa $= M$.

Fig. 22.

Deinde

Deinde ſit abſciſſa AP $=x$, applicata PM $=y$; arcus aM $=s$, qui cum abſciſſa x confundetur; ita ut ſtatui queat $ds = dx$; ex quo radius oſculi in M orietur $= \frac{dy^2}{ddy} = R$. Sit autem porro applicata prima Aa $= b$. His poſitis, ratiocinium ut ante inſtituendo, ad eandem pervenietur æquationem $\frac{Ekk}{R} = \frac{M}{af} \int dx \int y\,dx = \frac{Ekk\,ddy}{dx^2}$.

81. Si igitur ponamus $\frac{Ekk.af}{M} = c^4$, ubi f ut ante exprimit longitudinem penduli ſimplicis iſochroni; habebitur, integrando, pro curva hæc æquatio

$$y = Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}} + C \text{ ſin.} \frac{x}{c} + D \text{ coſ.} \frac{x}{c};$$

quæ ad præſentem caſum ita accommodabitur. Primo, ſi ponatur $x = 0$; fieri debet $y = b$; unde fit

$$b = A + B + D.$$

Secundo, cum ſit $\frac{c^4\,ddy}{dx^2} = \int dx \int y\,dx$; poſito $x = 0$, fieri debet $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, unde prodit

$$0 = A + B - D.$$

Tertio, cum ſit $\frac{c^4 d^3y}{dx^3} = \int y\,dx$, poſito $x = 0$; fieri quoque debet $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, unde naſcitur:

$$0 = A - B - D.$$

Quarto, ſi ponatur $x = a$, evaneſcere debet $\int y\,dx$, ſeu $\frac{d^3y}{dx^3}$; propterea quod $\int y\,dx$ exprimit ſummam omnium virium laminam in directione ad axem AB normali trahentium, quæ ſumma ſi non eſſet $= 0$, ipſa lamina motu locali promoveretur, contra inſtitutum; erit ergo, ob hanc rationem,

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} - Be^{-\frac{a}{c}} - C \text{ coſ.} \frac{a}{c} + D \text{ ſin.} \frac{a}{c}.$$

Quinto

Digitized by Google

Quinto; quia lamina in extremitate B eſt liberã, ibi curvatutam nullam habere poterit; eritque ideo, poſito $x = a$, quoque $\frac{d\,dy}{dx^2} = 0$; unde erit

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} - C \text{ ſin. } \frac{a}{c} - D \text{ coſ. } \frac{a}{c}.$$

His igitur quinque conditionibus in computum ductis, non ſolum quatuor conſtantes A, B, C & D determinabuntur; ſed etiam fractionis $\frac{a}{c}$ valor reperietur; ex quo proinde longitudo penduli ſimplicis iſochroni f innoteſcet.

82. Ex harum æquationum ſecunda & tertia, obtinetur $D = A + B$, & $C = A - B$, qui in ſequentibus ſubſtituti præbebunt

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} - Be^{-\frac{a}{c}} - (A-B)\text{ coſ. }\frac{a}{c} + (A+B)\text{ ſin. }\frac{a}{c}$$

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} - (A-B)\text{ ſin. }\frac{a}{c} - (A+B)\text{ coſ. }\frac{a}{c};$$

ex quibus reperitur:

$$\frac{A}{B} = \frac{e^{-\frac{a}{c}} - \text{coſ. }\frac{a}{c} - \text{ſin. }\frac{a}{c}}{e^{\frac{a}{c}} - \text{coſ. }\frac{a}{c} + \text{ſin. }\frac{a}{c}} = \frac{-e^{-\frac{a}{c}} - \text{ſin. }\frac{a}{c} + \text{coſ. }\frac{a}{c}}{e^{\frac{a}{c}} - \text{ſin. }\frac{a}{c} - \text{coſ. }\frac{a}{c}};$$

ex qua æqualitate elicitur iſta æquatio

$$0 = 2 - e^{\frac{a}{c}}\text{ coſ. }\frac{a}{c} - e^{-\frac{a}{c}}\text{ coſ. }\frac{a}{c}; \text{ ſeu } e^{\frac{a}{c}} = \frac{1 \pm \text{ſin. }\frac{a}{c}}{\text{coſ. }\frac{a}{c}}$$

unde ſequentes formabuntur æquationes

I. $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}\pi - \varphi = l$ tang. $\frac{1}{2}\varphi$, quæ dat $\frac{a}{c} = 0$.

pro ſitu laminæ naturali

II. $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}\pi - \varphi = l$ cot. $\frac{1}{2}\varphi$

III. $\frac{a}{c} = \frac{3}{2}\pi + \varphi = l$ cot. $\frac{1}{2}\varphi$

IV. $\frac{a}{c} = \frac{3}{2}\pi - \varphi = l$ cot. $\frac{1}{2}\varphi$

V. $\frac{a}{c} = \frac{5}{2}\pi + \varphi = l$ cot. $\frac{1}{2}\varphi$

VI. $\frac{a}{c} = \frac{5}{2}\pi - \varphi = l$ cot. $\frac{1}{2}\varphi$

&c.

83. Hæ æquationes iterum indicant innumerabiles oſcillationum modos, in quorum ſecundo lamina ſemel tantum axem AB interſecabit, in tertio bis, in quarto ter, in quinto quater, & ita porro. Ex quibus intelligitur modos ſecundum, quartum, ſextum &c. ad præſens inſtitutum non eſſe accommodatos. Quoniam enim in his numerus interſectionum eſt impar; laminæ ſitus inter oſcillandum in ſecundo foret talis, qualem Figura 23 repræſentat, in quo quamvis ſumma virium ſollicitantium per totam laminam evaneſcat, tamen ab iis lamina circa punctum medium C motum rotatorium acquireret: quia vires utrique ſemiſſi aC & bC applicatæ ad eundem laminæ motum rotatorium inducendum conſpirarent. Quam ob cauſam, cum omnino motus rotatorius excludi debeat, figura laminæ, quam inter oſcillandum induit, ita debet eſſe comparata, ut non ſolum
Fig. 22. virium ſollicitantium toti laminæ applicatarum ſit = 0, ſed etiam ut earum ſumma momentorum evaneſcat; quod obtinetur ſi curva in puncto medio c, diametro cC ſit prædita. Quod evenit ſi curva axem AB vel in duobus, vel in quatuor, vel generatim in punctorum numero pari ſecet; ex quo æquationes tertia, quinta, ſeptima &c. Solutiones tantum convenientes præbebunt.

84. Hæc ipſa limitatio in ipſa Problematis propoſitione con-

Digitized by Google

contenta reperietur, si ejusmodi tantum curvas admittamus, quæ rectam C c habeant diametrum, seu in quibus valor ipsius y prodeat idem, si loco x scribatur $a - x$. Ponamus ergo in æquatione generali $a - x$ loco x: atque prodibit

$$y = Ae^{\frac{a}{c}}e^{-\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}}e^{\frac{x}{c}} + C \text{ sin. } \frac{a}{c}.\text{cos. } \frac{x}{c} - C \text{ cos. } \frac{a}{c}.\text{ sin. } \frac{x}{c}$$
$$+ D \text{ cos. } \frac{a}{c}.\text{cos. } \frac{x}{c} + D \text{ sin. } \frac{a}{c}.\text{ sin. } \frac{x}{c}$$

quæ cum congruere debeat cum æquatione

$$y = Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}} + C \text{ sin. } \frac{x}{c} + D \text{ cos. } \frac{x}{c};$$

fiet $Ae^{\frac{a}{c}} = B$, $C(1 + \text{cos. } \frac{a}{c}) = D \text{ sin. } \frac{a}{c}$, & $C \text{ sin. } \frac{a}{c} = D(1 - \text{cos. } \frac{a}{c})$; quarum duæ posteriores congruunt. Cum ergo sit $\frac{A}{B} = e^{-\frac{a}{c}}$, hoc valore cum superioribus comparato prodibit:

$$e^{-\frac{a}{c}} - \text{cos. } \frac{a}{c} - \text{sin. } \frac{a}{c} = 1 - e^{-\frac{a}{c}} \text{cos. } \frac{a}{c} + e^{-\frac{a}{c}} \text{sin. } \frac{a}{c}$$

seu $e^{-\frac{a}{c}} = \dfrac{1 + \text{cos. } \frac{a}{c} + \text{sin. } \frac{a}{c}}{1 + \text{cos. } \frac{a}{c} - \text{sin. } \frac{a}{c}} = \dfrac{1 + \text{sin. } \frac{a}{c}}{\text{cos. } \frac{a}{c}} = \dfrac{\text{cos. } \frac{a}{c}}{1 - \text{sin. } \frac{a}{c}}$.

85. Erit ergo $e^{\frac{a}{c}} = \dfrac{1 - \text{sin. } \frac{a}{c}}{\text{cos. } \frac{a}{c}}$: sicque in æquatione prius inventa $e^{\frac{a}{c}} = \dfrac{1 \pm \text{sin. } \frac{a}{c}}{\text{cos. } \frac{a}{c}}$; semissis tantum f casuum superiorum exhibitorum, scilicet ii qui sunt numeris imparibus, præsens Problema resolvent. Quare cum prima æquatio contineat

laminæ ſtatum naturalem, omnes oſcillationum modi in ſequentibus æquationibus continebuntur:

$$\text{I. } \frac{a}{c} = \tfrac{1}{2}\pi + \Phi = l \cot. \tfrac{1}{2}\Phi$$

$$\text{II. } \frac{a}{c} = \tfrac{3}{2}\pi + \Phi = l \cot. \tfrac{1}{2}\Phi$$

$$\text{III. } \frac{a}{c} = \tfrac{11}{2}\pi + \Phi = l \cot. \tfrac{1}{2}\Phi$$

&c.

Æquationum ergo harum prima præbebit primum eumque principalem oſcillandi modum, pro quo valor anguli Φ ſimili modo, quo ſupra, per approximationem reperietur. Limites autem anguli Φ mox colliguntur eſſe $1^\circ, 0', 40''$ & $1^\circ, 1', 0''$, ex quibus per ſequentem calculum verus ipſius Φ valor eruitur.

$\Phi =$	$1^\circ, 0', 40''$	$1^\circ, 1', 0''$
ſeu	$3640''$	$3660''$
log. =	3, 56110 13836	3, 56348 10854
ſubtr. =	5, 31442 51332	5, 31442 51332
$l\Phi =$	8, 24667 62504	8, 24905 59522
$\Phi =$	0, 01764 72180	0, 01774 41807
$\frac{3}{2}\pi =$	4, 71238 89804	4, 71238 89804
$\frac{a}{c} =$	4, 73003 61984	4, 73013 31611
$\frac{1}{2}\Phi =$	$30', 20''$	$30', 30''$
$v =$	3, 05434 24742	3, 05196 26482
$lv =$	0, 31267 28453	0, 31216 94510
add.	0, 36221 56886	0, 36221 56886
$lu =$	0, 67488 85339	0, 67438 51396
$u =$	4, 73029 83543	4, 72481 86037
Error. +	636341	+ 53145574
		636341
	diff.	52509233

Hinc

Hinc intelligitur verum valorem ipſius Φ non intra iſtos limites contineri, ſed aliquantulum eſſe minorem quam 1°, 0′, 40″. Nihilo vero minus is ex his erroribus reperietur. Sit enim $\Phi = 1°, 0', 40'' - n''$; erit $20'' : 52509233 = n'' : 636341$; unde reperitur $n = \frac{2423}{10000}$, ita ut ſit

$$\Phi = 1°, 0', 39\ \frac{7576''}{10000}.$$

Cum ergo ſit $\Phi = 3639, 7576''$ erit

$$\begin{array}{rl} l\Phi = & 3,5610724615 \\ \text{ſubtr.} & \underline{5,3144251332} \\ & 8,2466473283 \\ \Phi = & 0,0176460428 \\ \frac{1}{2}\pi = & \underline{4,7123889804} \\ \frac{a}{c} = & 4,7300350232. \end{array}$$

86. Sit hic numerus $= m$, erit, ob $c^4 = \frac{Ekk.af}{M}$, $a^4 = \frac{m^4.Ekk.af}{M}$, & $f = \frac{a^4}{m^4}.\frac{1}{Ekk}.\frac{M}{a}$. Unde pari modo numerus oſcillationum ab hac lamina uno minuto ſecundo editarum, erit $= \frac{mm}{aa}\sqrt{g.Ekk.}\frac{a}{M}$, exiſtente $g = 3,16625$ ped. Rhen. Quod ſi ergo eadem lamina, nunc altero termino B muro infixo, nunc libera ad ſonum edendum incitetur, erunt ſoni inter ſe ut nn ad mm, hoc eſt ut quadrata numerorum 1,8751040813 & 4,7300350232, hoc eſt ut 1 ad 6,363236. Ratio ergo horum ſonorum erit proxime ut 11 ad 70: horum ergo ſonorum intervallum conſtituet duas octavas, cum quinta & hemitonio. Sin autem poſterior lamina libera duplo longior capiatur quam prior fixa, intervallum ſonorum erit fere ſexta minor.

87. Invento hoc valore fractionis $\frac{a}{c}$; æquatio pro curva,

quam lamina inter oſcillandum format, hactenus indeterminata poterit determinari. Cum enim ſit

$$e^{\frac{a}{c}} = \frac{1 - \text{ſin.}\frac{a}{c}}{\text{cof.}\frac{a}{c}}, \text{ erit } B = \frac{1 - \text{ſin.}\frac{a}{c}}{\text{cof.}\frac{a}{c}} A, \& C = A - B$$

$$= A\left(\text{cof.}\frac{a}{c} + \text{ſin.}\frac{a}{c} - 1\right) : \text{cof.}\frac{a}{c}, \& D = A + B$$

$$= A\left(\text{cof.}\frac{a}{c} - \text{ſin.}\frac{a}{c} + 1\right) : \text{cof.}\frac{a}{c}. \text{ Jam eſt } b = A + B$$

$$+ D = 2D = 2A\left(\text{cof.}\frac{a}{c} - \text{ſin.}\frac{a}{c} + 1\right) : \text{cof.}\frac{a}{c}; \text{ unde fit}$$

$$A = \frac{b\,\text{cof.}\frac{a}{c}}{2\left(\text{cof.}\frac{a}{c} - \text{ſin.}\frac{a}{c} + 1\right)} = \frac{b\left(1 + \text{ſin.}\frac{a}{c} - \text{cof.}\frac{a}{c}\right)}{4\,\text{ſin.}\frac{a}{c}}$$

$$B = \frac{b\left(1 - \text{ſin.}\frac{a}{c}\right)}{2\left(\text{cof.}\frac{a}{c} - \text{ſin.}\frac{a}{c} + 1\right)} = \frac{b\left(-1 + \text{ſin.}\frac{a}{c} + \text{cof.}\frac{a}{c}\right)}{4\,\text{ſin.}\frac{a}{c}}$$

$$C = \frac{b\left(-1 + \text{ſin.}\frac{a}{c} + \text{cof.}\frac{a}{c}\right)}{2\left(\text{cof.}\frac{a}{c} - \text{ſin.}\frac{a}{c} + 1\right)} = \frac{b\left(1 - \text{cof.}\frac{a}{c}\right)}{2\,\text{ſin.}\frac{a}{c}}$$

$$D = \frac{b}{2} = \frac{b\,\text{ſin.}\frac{a}{c}}{2\,\text{ſin.}\frac{a}{c}}.$$

His ſubſtitutis oritur hæc æquatio: $\frac{y}{b} =$

$$\frac{e^{\frac{x}{c}}\,\text{cof.}\frac{a}{c} + e^{-\frac{x}{c}}\left(1 - \text{ſin.}\frac{a}{c}\right)}{2\left(1 - \text{ſin.}\frac{a}{c} + \text{cof.}\frac{a}{c}\right)} + \frac{\left(1 - \text{cof.}\frac{a}{c}\right)\text{ſin.}\frac{x}{c} + \text{ſin.}\frac{a}{c}\,\text{cof.}\frac{x}{c}}{2\,\text{ſin.}\frac{a}{c}}.$$

88. Quia autem recta C c eſt curvæ diameter, ponatur abſciſſa a puncto medio C ſumpta C P $= z$, erit $x = \frac{1}{2}a - z$. Unde

Unde fit $e^{\frac{x}{c}} = e^{\frac{a}{2c}} e^{-\frac{z}{c}} = e^{-\frac{z}{c}} \sqrt{\frac{1 - \text{fin. } \frac{a}{c}}{\text{cof. } \frac{a}{c}}}$, &

$e^{-\frac{x}{c}} = e^{\frac{z}{c}} \sqrt{\frac{\text{cof. } \frac{a}{c}}{1 - \text{fin. } \frac{a}{c}}}$; ex quo erit $\frac{A e^{\frac{x}{c}} + B e^{-\frac{x}{c}}}{b} =$

$\frac{(e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}) \sqrt{\text{cof. } \frac{a}{c}} (1 - \text{fin. } \frac{a}{c})}{2(1 - \text{fin. } \frac{a}{c} + \text{cof. } \frac{a}{c})} = \frac{e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}}{2(e^{\frac{a}{2c}} + e^{-\frac{a}{2c}})}$.

Tum vero erit $(1 - \text{cof. } \frac{a}{c}) \text{ fin. } \frac{x}{c} + \text{fin. } \frac{a}{c} \text{ cof. } \frac{x}{c} =$

$\text{fin. } \frac{x}{c} + \text{fin. } \frac{a-x}{c} = \text{fin. } (\frac{a}{2c} - \frac{z}{c}) + \text{fin. } (\frac{a}{2c} + \frac{z}{c})$

$= 2 \text{ fin. } \frac{a}{2c} \text{ cof. } \frac{z}{c}$; quibus ſubſtitutis, oritur hæc æquatio:

$\frac{2y}{b} = \frac{e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}}{e^{\frac{a}{2c}} + e^{-\frac{a}{2c}}} + \frac{\text{cof. } \frac{z}{c}}{\text{cof. } \frac{a}{2c}}$; quæ eſt forma ſimpliciſſima,

qua natura curvæ aMcb exprimi poteſt: manifeſtum autem eſt, ſive x ſumatur affirmative, ſive negative, eundem eſſe proditurum valorem applicatæ y. Eſt vero $e^{\frac{a}{2c}} + e^{-\frac{a}{2c}} = \frac{2 \text{ cof. } \frac{a}{2c}}{\sqrt{\text{cof. } \frac{a}{c}}}$ Invenimus autem angulum $\frac{a}{c} = 271°, 0', 39\frac{19}{4}''$.

89. Si jam ponatur $z = 0$; præbebit y valorem applicatæ Cc; erit ergo $\frac{2. Cc}{b} = \frac{2\sqrt{\text{cof. } \frac{a}{c}}}{2 \text{ cof. } \frac{a}{2c}} + \frac{1}{\text{cof. } \frac{a}{2c}}$ ſeu $\frac{Cc}{Aa} =$

$= \frac{1 + \sqrt{\text{cof. } \frac{a}{c}}}{2 \text{ cof. } \frac{a}{2c}} = \frac{1}{2} \text{ fec. } \frac{a}{2c} + \frac{1}{2} \text{ fec. } \frac{a}{2c} \sqrt{\text{cof. } \frac{a}{c}}$. At eſt

cof. $\frac{a}{c}$ = ſin. 1°, 0′, $39''_{+}$ & cof. $\frac{a}{2c}$ = ſin. 45°, 30′, $19''_{8}$.

Hinc reperitur $\frac{Cc}{Aa} = 0,607815$. Deinde ſi ponatur $y = 0$, reperientur puncta E & F quibus curva axem interſecat. Erit ergo

$$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}} = -\frac{\text{cof. } \frac{z}{c}}{\text{cof. } \frac{a}{2c}} \left(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{2c}} \right) = \frac{2 \text{ cof. } \frac{z}{c}}{\sqrt{\text{cof. } \frac{a}{c}}},$$

ex qua per approximationes reperitur

$$\frac{CE}{CA} = 0,551685, \text{ \& } \frac{AE}{AC} = 0,448315.$$

Dum ergo lamina oſcillationes peragit, hæc puncta E & F reſtabunt immobilia; ex quo hujuſmodi motus oſcillatorius, qui alias vix actu produci poſſe videatur, facile produci poterit. Si enim lamina in punctis E & F hoc modo definitis figatur, tum perinde oſcillabitur ac ſi penitus eſſet libera.

90. Si eodem modo tractetur æquationum ſupra inventarum ſecunda $\frac{a}{c} = \frac{7\pi}{2} + \Phi = l \text{ cot. } \Phi$; quo quidem caſu reperietur proxime $\Phi = 0$; tum prodibit ſecundus modus, quo lamina libera vibrationes abſolvere poteſt, ſecando ſcilicet axem AB in quatuor punctis; ideoque lamina perinde oſcillabitur, ac ſi in his quatuor punctis eſſet fixa. Viciſſim ergo, ſi lamina in his quatuor punctis, vel eorum duobus tantum quibuſvis figatur; tum, eodem modo oſcillabitur ac ſi eſſet libera; ſonum autem edet multo auctiorem; quippe qui ad ſonum præcedentem modo editum rationem tenebit fere ut 7^{a} ad 3^{a}, hoc eſt, intervallum erit duarum octavarum cum quarta & hemitonii ſemiſſe.

Digitized by Google

missé. Tertius oscillandi modus, quo est $\frac{\alpha}{c} = \frac{11}{2}\pi + \Phi = l$ cot. Φ, habebit sex curvæ acb intersectiones cum axe AB; sonusque edetur plus una octava cum tertia minore acutior; huncque sonum lamina edet si in duobus illorum sex punctorum figatur. Hinc patet quam varii soni ab eadem lamina, prout in duobus punctis diversimode figitur, edi queant; & nisi puncta bina, quibus infigitur, congruant cum intersectionibus in modo primo, vel secundo, vel tertio, atque adeo oscillationes sese ad modorum aliquem sequentium, vel etiam ad infinitesimum componant, tum sonum fore tantopere acutum, ut percipi omnino nequeat, seu quod eodem redit, lamina motum oscillatorium prorsus recipere non poterit: vel saltem, instar cordæ vibrantis, cui ponticulus ita subjicitur ut partes nullam inter se teneant rationem rationalem, sonus minus distinctus producetur.

Fig. 24. De oscillationibus laminæ elasticæ utroque termino fixæ.

90. Infixa nunc sit lamina elastica in utroque termino A & B; ita tamen ut tangentes curvæ in his punctis non determinentur. Ad hunc scilicet casum in experimentis producendum, laminæ in utroque termino infigantur tenuissimi aculei $A\alpha$, $B\mathfrak{C}$, qui parieti infixi reddant laminæ extremos terminos A & B immobiles. Ad motum oscillatorium hujus laminæ elasticæ investigandum, ponatur, ut ante, elasticitas absoluta laminæ $= Ekk$, longitudo $AB = \alpha$, & pondus $= M$, atque longitudo penduli simplicis isochroni $= f$. Sit AMB figura curvilinea, quam lamina inter oscillandum induit, ac ponatur abscissa $AP = AM = x$, applicata $PM = y$, & radius osculi in $M = R$. Sit porro P vis, quam aculeus $A\alpha$ sustinet in directione $A\alpha$, & quia vis, qua elementum Mm in directione $M\mu$ urgeri debet quo lamina in hoc statu conservetur, est $= \frac{My\,dx}{\alpha f}$; erit, per Regulas supra descriptas, æquatio pro curva hæc

$$\frac{Ekk}{R} = Px - \frac{M}{\alpha f}\int dx \int y\,dx$$

Est vero $R = -\frac{dx^2}{d\,dy}$; quia curva versus axem est concava;

unde fit $\frac{Ekk\,ddy}{dx^2} = \frac{M}{af}\int dx \int y\,dx - Px$.

Facto ergo $x = 0$, erit radius oſculi R in A infinitus, ideoque $ddy = 0$.

91. Si hæc æquatio bis differentietur; prodibit eadem æquatio, quam pro caſibus præcedentibus invenimus,

$$Ekk\,d^4y = \frac{M}{af}y\,dx^4$$

Quod ſi ergo ponatur $\frac{Ekk.af}{M} = \alpha^4$, erit æquatio integralis

$$y = Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}} + C\,\text{ſin.}\,\frac{x}{c} + D\,\text{coſ.}\,\frac{x}{c}.$$

Ad quam determinandam, ponatur $x = 0$, & quia ſimul y evaneſcere debet, erit $0 = A + B + D$.

Secundo, ponatur $x = a$, & quia pariter fieri debet $y = 0$, erit

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} + C\,\text{ſin.}\,\frac{a}{c} + D\,\text{coſ.}\,\frac{a}{c}.$$

Tertio, quia $\frac{ddy}{dx^2}$ evaneſcere debet, poſito & $x = 0$ & $x = a$; fiet

$$0 = A + B - D, \text{ & } 0 = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} - C\,\text{ſin.}\,\frac{a}{c} - D\,\text{coſ.}\,\frac{a}{c}.$$

Jam æquationes $0 = A + B - D$ & $0 = A + B + D$ dant $D = 0$, & $B = -A$; qui valores in reliquis duabus æquationibus ſubſtituti præbent

$$0 = A(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}) + C\,\text{ſin.}\,\frac{a}{c}, \text{ & } 0 = A(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}) - C\,\text{ſin.}\,\frac{a}{c};$$

quibus ſatisfieri nequit, niſi ſit $A = 0$, quia non poteſt eſſe $e^{\frac{a}{c}} = e^{-\frac{a}{c}}$, præter caſum $\frac{a}{c} = 0$; tum vero eſſe debet $C\,\text{ſin.}\,\frac{a}{c} = 0$. Hic cum nequeat poni $C = 0$, quia motus oſcillatorius foret nullus, erit ſin. $\frac{a}{c} = 0$, ideoque vel

$\frac{a}{c}$

Digitized by Google

$\frac{a}{c} = \pi$, vel $\frac{a}{c} = 2\pi$, &c. unde iterum infiniti diverſi oſcillationum oriuntur modi, prout curva AMB axem vel nuſquam præter terminos A & B ſecat, vel in uno, vel in duobus, vel in pluribus punctis; uti colligitur ex æquatione $y = C$ ſin. $\frac{x}{c}$. Puncta interſectionum autem quotcunque fuerint, æqualibus intervallis inter ſe diſtabunt.

93. Cum igitur pro primo ac principali oſcillandi modo ſit $\frac{a}{c} = \pi$, erit $a^4 = \pi^4 c^4 = \pi^4 \times Ekk \times \frac{a}{M} \times f$, unde fit $f = \frac{a^4}{\pi^4} \times \frac{1}{Ekk} \times \frac{M}{a}$; Quare ratione longitudinis laminæ, ſoni iterum tenebunt rationem reciprocam duplicatam longitudinum. Sonus autem hujus laminæ hoc modo editus ſe habebit ad ſonum ejuſdem laminæ, ſi altero termino B muro eſſet infixa, uti $\pi\pi$ ad quadratum numeri 1, 8751040813, hoc eſt ut 2, 807041 ad 1, ſeu in numeris minimis ut 57 ad 160, quod intervallum eſt octava cum tritono fere. Si oſcillationes ſe ad ſecundum modum, quo eſt $\frac{a}{c} = 2\pi$, componant; ſonus fiet duplici octava acutior; ſin ſit $\frac{a}{c} = 3\pi$, ſonus acutior fiet tribus octavis cum tono majore, quam caſu quo $\frac{a}{c} = \pi$; & ita porro. Quæ quo facilius ad experimenta revocari queant; notandum eſt oſcillationes hic quam-minimas poni, ita ut nulla laminæ elongatione ſit opus. Quare, ne tenacitas laminæ, qua etiam minimæ extenſioni, ſine qua oſcillationes iſtæ peragi nequeunt, reluctatur, hic alterationem afferat; cuſpides illæ ita debent conſtitui, ut tantilla extenſio non impediatur: quod evenit ſi plano politiſſimo incumbant. Sic lamina elaſtica AB in A & B cuſpidibus A α & B C munita, ſi cuſpides ſpeculo imponantur, ſonum calculo conformem edet.

De oſcillationibus laminæ elaſticæ utroque termino fixæ. Fig. 25.

94. Hoc caſu expedito; iſtam de laminis elaſticis tractationem claudat motus oſcillatorius laminæ elaſticæ, utroque termino A & B muro infixæ, ita ut inter oſcillandum puncta A & B non ſolum maneant immota, ſed etiam recta AB perpetuo ſit tangens curvæ AMB in punctis A & B. Hic ergo iterum cavendum eſt, ut obices terminos A & B comprehendentes non ſint adeo firmi, ſed tantillam extenſionem quanta ad curvaturam requiritur, permittant. Quxcunque ergo ſint vires in terminis A & B ad laminam continendam requiſitæ; ad ſequentem pervenietur æquationem differentialem quarti ordinis $Ekkd^4y = \frac{M}{af} y dx^4$; cujus, ſi ponatur $\frac{Ekk.af}{M} = c^4$, integralis erit ut ſupra,

$$y = Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}} + C \text{ſin.} \frac{x}{c} + D \text{coſ.} \frac{x}{c}.$$

95. Conſtantes A, B, C, & D autem ita debent eſſe comparatæ, ut poſito $x = 0$, non ſolum y evaneſcat, ſed etiam fiat $dy = 0$, quia in A curva ab axe AB tangitur. Hoc idem utrumque vero evenire debet, ſi ponatur $x = a$; unde iſtæ quatuor æquationes naſcentur.

$$\text{I.} \quad 0 = A + B + D$$
$$\text{II.} \quad 0 = A - B + C$$
$$\text{III.} \quad 0 = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} + C \text{ſin.} \frac{a}{c} + D \text{coſ.} \frac{a}{c}$$
$$\text{IV.} \quad 0 = Ae^{\frac{a}{c}} - Be^{-\frac{a}{c}} + C \text{coſ.} \frac{a}{c} - D \text{ſin.} \frac{a}{c}.$$

Ex harum æquationum prima & ſecunda oritur $C = -A + B$; & $D = -A - B$, qui valores in reliquis duabus ſubſtituti dabunt

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} + Be^{-\frac{a}{c}} - (A - B) \text{ſin.} \frac{a}{c} - (A + B) \text{coſ.} \frac{a}{c}$$
$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} - Be^{-\frac{a}{c}} - (A - B) \text{coſ.} \frac{a}{c} + (A + B) \text{ſin.} \frac{a}{c}$$

quarum

quarum ſumma ac differentia eſt,

$$0 = Ae^{\frac{a}{c}} + B\,\text{ſin.}\,\frac{a}{c} - A\,\text{cof.}\,\frac{a}{c}, \text{ ſeu } \frac{A}{B} = \frac{\text{ſin.}\,\frac{a}{c}}{\text{cof.}\,\frac{a}{c} - e^{\frac{a}{c}}}$$

$$0 = Be^{-\frac{a}{c}} - A\,\text{ſin.}\,\frac{a}{c} - B\,\text{cof.}\,\frac{a}{c}, \text{ ſeu } \frac{A}{B} = \frac{e^{-\frac{a}{c}} - \text{cof.}\,\frac{a}{c}}{\text{ſin.}\,\frac{a}{c}}$$

unde fit $2 = \left(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}\right)\text{cof.}\,\frac{a}{c}$, ſeu

$$e^{\frac{a}{c}} = \frac{1 \pm \text{ſin.}\,\frac{a}{c}}{\text{cof.}\,\frac{a}{c}}.$$

Quæ æquatio, quia congruit cum ea, quam §. 81 invenimus, ſequentes Solutiones numero infinitæ ſatisfacient:

I. $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}\pi - \Phi = l\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\Phi$

II. $\frac{a}{c} = \frac{3}{2}\pi + \Phi = l\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\Phi$

III. $\frac{a}{c} = \frac{5}{2}\pi - \Phi = l\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\Phi$

&c.

96. Harum æquationum primæ ſatisfieri nequit, niſi ſit $\Phi = 90°$, ideoque $\frac{a}{c} = 0$; unde primus oſcillandi modus oritur ex æquatione $\frac{a}{c} = \frac{3}{2}\pi + \Phi = l\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\Phi$; quæ cum jam ſupra ſit tractata, erit $\frac{a}{c} = 4{,}730035023\,2$. Quamobrem lamina elaſtica, cujus uterque terminus parieti infixus tenetur, perinde vibrationes ſuas peraget, ac ſi eſſet omnino libera. Hæc

Digitized by Google

autem convenientia tantum ad primum oſcillandi modum ſpectat; ſecundus enim oſcillandi modus, quo eſt $\frac{\alpha}{c} = \frac{1}{2}\pi - \Phi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\Phi$, atque lamina axem AB inter oſcillandum in uno puncto interſecat, in lamina libera ſui parem non habet; tertius autem modus laminæ utrinque infixæ congruet cum modo ſecundo laminæ liberæ, atque ita porro.

97. Hæc duo poſtrema oſcillationum genera, ob cauſam allatam, non congrue per experimenta explorari poſſunt: primum autem non ſolum ad experimenta inſtituenda maxime eſt aptum; ſed etiam adhiberi poteſt ad elaſticitatem abſolutam cujuſque laminæ propoſitæ, quam per Ekk indicavimus, inveſtigandam. Quod ſi enim ſonus notetur, quem hujuſmodi lamina altero termino muro infixa edit, eique in corda conſonus efficiatur, ſimul numerus oſcillationum uno minuto ſecundarum editarum cognoſcetur. Qui ſi æqualis ponatur expreſſioni $\frac{nn}{aa}\sqrt{g}.Ekk.\frac{a}{M}$, ob numerum n cognitum, & quantitates g, a, & M per dimenſiones inventas, reperietur valor expreſſionis Ekk; ſicque elaſticitas abſoluta innoteſcit; quæ cum ea quam ſupra ex incurvatione reperire docuimus, comparari poteſt,

AD-

ADDITAMENTUM II.

De motu projectorum in medio non reſiſtente, per Methodum maximorum ac minimorum determinando.

1. QUoniam omnes naturæ effectus ſequuntur quandam maximi minimive legem; dubium eſt nullum, quin in lineis curvis, quas corpora projecta, ſi a viribus quibuscunque ſollicitentur, deſcribunt, quæpiam maximi minimive proprietas locum habeat. Quænam autem ſit iſta proprietas, ex principiis metaphyſicis a priori definire non tam facile videtur: cum autem has ipſa curvas, ope Methodi directæ, determinare liceat; hinc, debita adhibita attentione, id ipſum, quod in iſtis curvis eſt maximum vel minimum, concludi poterit. Spectari autem potiſſimum debet effectus a viribus ſollicitantibus oriundus; qui cum in motu corporis genito conſiſtat, veritati conſentaneum videtur hunc ipſum motum, ſeu potius aggregatum omnium motuum qui in corpore projecto inſunt, minimum eſſe debere. Quæ concluſio etſi non ſatis confirmata videatur, tamen, ſi eam cum veritate jam a priori nota conſentire oſtendero, tantum conſequetur pondus, ut omnia dubia quæ circa eam ſuboriri queant penitus evaneſcant. Quin-etiam cum ejus veritas fuerit evicta, facilius erit in intimas Naturæ leges atque cauſas finales inquirere; hocque aſſertum firmiſſimis rationibus corroborare.

2. Sit maſſa corporis projecti $= M$, ejuſque, dum ſpatiolum $= ds$ emetitur, celeritas debita altitudini $= v$; erit quantitas motus corporis in hoc loco $= M \sqrt{v}$; quæ per ipſum ſpatiolum ds multiplicata, dabit $M ds \sqrt{v}$ motum corporis collectivum per ſpatiolum ds. Jam dico lineam a corpore deſcriptam:

curva ita erit comparata, ut in ea sit $\int ds \sqrt{(a+gx)}$ minimum. Ponatur $dy = p\,dx$, ut sit $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$, atque minimum esse debet $\int dx \sqrt{(a+gx)}\,(1+pp)$; quæ expressio cum forma generali $\int Z\,dx$ comparata dat $Z = \sqrt{(a+gx)}\,(1+pp)$; quare, cum positum sit $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$, erit $N = 0$ & $P = \frac{p\sqrt{(a+gx)}}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quia ergo valor differentialis est $N - \frac{dP}{dx}$; ob $N = 0$, fiet præsenti casu $dP = 0$. & $P = \sqrt{C}$. Habebitur ergo $\sqrt{C} = \frac{p\sqrt{(a+gx)}}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{dy\sqrt{(a+gx)}}{ds}$; unde fit $C\,dx^2 + C\,dy^2 = dy^2(a+gx)$. & $dy = \frac{dx\sqrt{C}}{\sqrt{(a-C+gx)}}$; quæ integrata dat $y = \frac{2}{g}\sqrt{C(a-C+gx)}$.

5. Manifestum quidem est hanc æquationem esse pro Parabola. At ejus consensum cum veritate attentius considerasse juvabit. Primum ergo patet tangentem hujus curvæ esse horizontalem, seu $dx = 0$; ubi est $a - C + gx = 0$. Cum igitur principium abscissarum A ab arbitrio nostro pendeat, sumatur id in hoc ipso loco, fietque $C = a$; tum vero ipse axis per hoc punctum curvæ summum transeat, ita ut, posito $x = 0$, fiat simul $y = 0$. His consideratis, æquatio pro curva erit hæc $y = 2\sqrt{\frac{ax}{g}}$; quam non solum patet esse pro Parabola; sed etiam, cum celeritas in puncto A sit $\sqrt{a}$, altitudo CA, ex qua corpus labendo ab eadem vi g sollicitatum eam ipsam acquirit celeritatem, qua in puncto A movetur, erit $= \frac{a}{g}$; hoc est, quartæ parametri parti æquatur; prorsus uti ex doctrina motus projectorum per Methodum directam intelligitur.

6. Sollicitetur, ut ante, corpus ubique verticaliter deorsum, at ipsa vis sollicitans non sit constans, sed pendeat utcunque ab altitudine CP. Scilicet posita abscissa $CP = x$, sit vis qua corpus in M deorsum nititur $= X$ functioni cuicunque ipsius x. Si ergo vocetur applicata $PM = y$, elementum arcus

$Mm = ds$, & $dy = p\,dx$; erit $dv = X\,dx$, & $v = A + \int X\,dx$; unde minimum esse debet hæc expressio $\int dx \sqrt{(A + \int X\,dx)(1+pp)}$, ex qua pro curva descripta AM obtinebitur hæc æquatio . .

$\sqrt{C} = \frac{p\sqrt{(A+\int X\,dx)}}{\sqrt{(1+pp)}}$ & $p = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{(A-C+\int X\,dx)}} = \frac{dy}{dx}$;

seu $y = \int \frac{dx\sqrt{C}}{\sqrt{(A-C+\int X\,dx)}}$. Tangens ergo curvæ erit horizontalis ubi $\int X\,dx = C - A$. Hæc vero eadem æquatio trajectoriæ corporis per Methodum directam reperitur.

Fig. 27. 7. Sollicitetur nunc corpus in M a duabus viribus, altera horizontali $= T$ secundum directionem MP, altera verticali $= X$ secundum directionem MQ. Sit autem X functio quæcunque rectæ verticalis $MQ = CP = x$, & T functio quæcunque applicatæ $PM = y$. Positis ergo ut ante $dy = p\,dx$, erit $dv = -X\,dx - T\,dy$, fietque $v = A - \int X\,dx - \int T\,dy$; unde minimum esse debet hæc formula $\int dx\sqrt{(1+pp)}(A - \int X\,dx - \int T\,dy)$. Differentietur $\sqrt{(1+pp)}(A - \int X\,dx - \int T\,dy)$, atque prodibit . . . . . .

$\frac{-X\,dx\sqrt{(1+pp)}}{2\sqrt{(A-\int X\,dx-\int T\,dy)}} - \frac{T\,dy\sqrt{(1+pp)}}{2\sqrt{(A-\int X\,dx-\int T\,dy)}} + \frac{p\,dp\sqrt{(A-\int X\,dx-\int T\,dy)}}{\sqrt{(1+pp)}}$. Hinc posito

$N = \frac{-T\sqrt{(1+pp)}}{2\sqrt{(A-\int X\,dx-\int T\,dy)}}$, & $P = \frac{p\sqrt{(A-\int X\,dx-\int T\,dy)}}{\sqrt{(1+pp)}}$;

erit pro curva quæsita hæc æquatio $0 = N - \frac{dP}{dx}$, seu $N\,dx = dP$. Hinc ergo fit $\frac{-T\,dx\sqrt{(1+pp)}}{2\sqrt{(A-\int X\,dx-\int T\,dy)}} = \frac{dp\sqrt{(A-\int X\,dx-\int T\,dy)}}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}} - \frac{pX\,dx - pT\,dy}{2\sqrt{(1+pp)}(A-\int X\,dx-\int T\,dy)}$

seu $\frac{dp\sqrt{(A-\int X\,dx-\int T\,dy)}}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}} = \frac{X\,dv - T\,dx}{2\sqrt{(1+pp)}(A-\int X\,dx-\int T\,dy)}$;

ideoque $\frac{2\,dp}{1+pp} = \frac{X\,dy - T\,dx}{A-\int X\,dx-\int T\,dy}$. Hanc æquationem veritati esse consentaneam patebit, si loco $A - \int X\,dx - \int T\,dy$ ponatur

Digitized by Google

ponatur v, erit enim $\frac{-2vdp}{(1+pp)^{3:2}} = \frac{Xdy - Ydx}{\sqrt{(1+pp)}}$. At eſt radius oſculi $r = -\frac{(1+pp)^{3:2}dx}{dp}$, quo introducto eſt $\frac{2v}{r} = \frac{Ydx - Xdy}{ds}$; ubi eſt $\frac{2v}{r}$ vis corporis centrifuga, & $\frac{Ydx - Xdy}{ds}$ exprimit vim normalem ex viribus ſollicitantibus ortam; quarum virium æqualitas utique in omni motu projectorum locum habet.

8. Æquatio autem inventa $\frac{2dp}{1+pp} = \frac{Xdy - Ydx}{A - \int Xdx - \int Ydy}$ ita generaliter eſt integrabilis, ſi multiplicetur per $\frac{p(A - \int Xdx - \int Ydy)}{1+pp}$; fiet enim $\frac{2pdp(A - \int Xdx - \int Ydy)}{(1+pp)^2} - \frac{ppXdx + Ydy}{1+pp} = 0$; quæ integrata dat $\frac{-p^2\int Xdx + \int Ydy - A}{1+pp} = C$, ſeu $\int Ydy - p^2\int Xdx = A + C + Cpp$, unde $p = \frac{\sqrt{(B + \int Ydy)}}{\sqrt{(C + \int Xdx)}}$; poſito B pro $-A-C$. Cum ergo ſit $p = \frac{dy}{dx}$, erit $\int \frac{dy}{\sqrt{(B + \int Ydy)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(C + \int Xdx)}}$, æquatio pro curva quæſita, in qua variabiles x & y ſunt a ſe invicem ſeparatæ. Vel ſi conſtantes B & C in negativas convertantur, erit $\int \frac{dy}{\sqrt{(B - \int Ydy)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(A - \int Xdx)}}$. Ex quibus etſi curvæ conſtructio faciliis habetur, tamen æquationes algebraïcæ, quoties quidem in ipſis continentur, non tam facile eruuntur. Sint X & Y functiones ſimiles & quidem poteſtates ipſarum x & y, ita ut ſit $\int \frac{dy}{\sqrt{(b^n - y^n)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(a^n - x^n)}}$, quæ æquatio, ſi $n = 1$, præbet Parabolam; ſin $n = 2$, Ellipſin centrum in C habentem; etſi hoc caſu utraque integratio quadraturam Circuli

requirit. Verisimile ergo videtur etiam aliis casibus, quibus neutra integratio succedit, curvas algebraïcas satisfacere; quarum autem inveniendarum Methodus adhuc desideratur.

19. Urgeatur corpus M perpetuo versus punctum fixum secundum directionem MC, vi quæ sit ut functio quæcunque distantiæ MC. Positis ut ante $CP = x$, $PM = y$, & $dy = p\,dx$; sit $CM = \sqrt{(x^2 + y^2)} = t$, atque sit T ea functio ipsius t, quæ exprimit vim centripetam. Resolvatur hæc vis in laterales secundum MQ & MP, erit vis trahens secundum $MQ = \frac{Tx}{t}$; & vis secundum $MP = \frac{Ty}{t}$; ex quibus oritur acceleratio $dv = -\frac{Tx\,dx}{t} - \frac{Ty\,dy}{t} = -T\,dt$, ob $x\,dx + y\,dy = t\,dt$; unde fit $v = A - \int T\,dt$. Quamobrem minimum esse debet hæc expressio $\int dx \sqrt{(1 + pp)}\,(A - \int T\,dt)$. Jam, secundum Regulæ præceptum, differentietur quantitas, $\sqrt{(1 + pp)}\,(A - \int T\,dt)$, prodibitque

$$-\frac{T\,dt\,\sqrt{(1 + pp)}}{2\sqrt{(A - \int T\,dt)}} + \frac{p\,dp\,\sqrt{(A - \int T\,dt)}}{\sqrt{(1 + pp)}}.$$

Ob $dt = \frac{x\,dx + y\,dy}{t}$, erit ergo $N = \frac{-Ty\sqrt{1 + pp}}{2t\sqrt{(A - \int T\,dt)}}$ & $P = \frac{p\sqrt{(A - \int T\,dt)}}{\sqrt{(1 + pp)}}$; ex quibus efficitur æquatio pro curva $N\,dx = dP$, quæ præbet,

$$-\frac{Ty\,dx\sqrt{(1 + pp)}}{2t\sqrt{(A - \int T\,dt)}} = \frac{dp\sqrt{(A - \int T\,dt)}}{(1 + pp)\sqrt{(1 + pp)}} - \frac{p\,T\,dt}{2\sqrt{(1 + pp)}(A - \int T\,dt)}$$

hæcque reducta abibit in istam,

$$\frac{T(x\,dy - y\,dx)}{2t\,(A - \int T\,dt)} = \frac{dp}{1 + pp}.$$

10. Quamvis hæc æquatio quatuor contineat litteras diversas, tamen debita dexteritate integrari potest. Cum enim sit $y\,dy + x\,dx = t\,dt = p\,y\,dx + x\,dx$, erit $dx = \frac{t\,dt}{x + py}$ & $dy = \frac{p\,t\,dt}{x + py}$; qui valores in æquatione substituti dabunt

$$\frac{(p\,x - y)\,T\,dt}{2(x + py)(A - \int T\,dt)} = \frac{dp}{1 + pp}, \text{ seu } \frac{T\,dt}{2(A - \int T\,dt)} = \frac{dp\,(p\,y + x)}{(1 + pp)(p\,x - y)}.$$

Ha-

Digitized

Harum expreſſionum utraque per logarithmos eſt integrabilis; eſt enim $\int \frac{T\,dt}{2(A-\int T\,dt)} = -\frac{1}{2}\,l(A-\int T\,dt)$, & $\int \frac{dp(x+py)}{(1+pp)(px-y)}$ reſolvitur in $\int \frac{x\,dp}{px-y} - \int \frac{p\,dp}{1+pp} = l\,\frac{px-y}{\sqrt{(1+pp)}}$; ita ut ſit $\frac{C}{\sqrt{(A-\int T\,dt)}} = \frac{px-y}{\sqrt{(1+pp)}}$; qua æquatione declaratur, celeritatem corporis in M, quæ eſt $= \sqrt{(A-\int T\,dt)}$, eſſe reciproce, ut perpendiculum ex C in tangentem demiſſum; quæ eſt proprietas palmaria horum motuum.

11. Hoc vero idem Problema commodius reſolvi poteſt ipſam rectam CM pro altera variabili aſſumendo. Verum Methodus ſupra tradita non poſtulat, ut ambæ variabiles ſint coordinatæ orthogonales, dummodo ſint ejuſmodi binæ quantitates quibus determinatis ſimul curvæ punctum determinetur. Hanc ob cauſam, non liceret diſtantiam CM cum perpendiculo ex C in tangentem demiſſo pro binis illis variabilibus accipere; quoniam etiamſi detur & diſtantia a centro & perpendiculum in tangentem, hinc tamen locus puncti curvæ non definitur. Nihil autem impedit, quo-minus diſtantia CM, & arcus circuli BP centro C deſcripti, in locum duarum variabilium ſubſtituantur; quia dato arcu BP, & diſtantia CM curvæ punctum M æque determinatur ac per coordinatas orthogonales. Hac ergo annotatione uſus Methodi multo latius extenditur, quam alioquin videri queat. *Fig. 28.*

12. Sit igitur diſtantia corporis a centro $MC = x$, & vis qua corpus ad centrum C ſollicitatur ſit $= X$ functioni cuicunque ipſius x. Centro C, radio pro lubitu aſſumpto $BC = c$, deſcribatur circulus, cujus arcus BP teneat locum alterius variabilis y, ita ut ſit $Pp = dy = p\,dx$. Ex vi autem ſollicitante eſt $dv = -X\,dx$, unde $v = A - \int X\,dx$. Centro C, radio $CM = x$, deſcribatur arculus Mn, erit $mn = dx$; & $CP : Pp = CM : Mn$, unde fit $Mn = \frac{p\,x\,dx}{c}$, & elementum ſpatii $Mm = dx\sqrt{(1+\frac{pp\,x\,x}{c\,c})}$. Quamobrem minimum eſſe

debet hæc formula $\int dx \sqrt{(A - \int X dx)(1 + \frac{ppxx}{cc})}$, ex qua oritur valor differentialis $\frac{1}{dx} d. \frac{pxx\sqrt{(A-\int X dx)}}{c\sqrt{(cc+ppxx)}}$, qui, per Regulam, nihilo æqualis positus, præbebit hanc æquationem: $\sqrt{C} = \frac{pxx\sqrt{(A-\int X dx)}}{c\sqrt{(cc+ppxx)}}$, seu $Cc^4 + Cccppxx = (A - \int X dx) ppx^4$, ex qua fit

$$p = \frac{cc\sqrt{C}}{\sqrt{((A-\int X dx)x^4 - Cccxx)}} = \frac{cc\sqrt{C}}{xy((A-\int X dx)xx - Ccc)}$$

seu $dy = \frac{ccdx\sqrt{C}}{xy((A-\int X dx)xx - Ccc)}$, quæ eadem æquatio etiam per Methodum directam invenitur.

13. Ex his igitur casibus perfectissimus consensus principii hic stabiliti cum veritate elucet: utrum autem iste consensus in casibus magis complicatis locum quoque sit habiturus, dubium superesse potest. Quamobrem quam late pateat istud principium diligentius erit investigandum, quo plus ipsi non tribuatur quam ejus natura permittit. Ad hoc explicandum, omnis motus projectorum in duo genera distribui debet; quorum altero celeritas corporis, quam in quavis loco habet, a solo situ pendet; ita ut, si ad eundem situm revertatur, eandem quoque sit recuperaturum celeritatem; quod evenit, si corpus vel ad unum vel ad plura centra fixa trahatur viribus, quæ sint ut functiones quæcunque distantiarum ab his centris. Ad alterum genus refero eos projectorum motus, quibus celeritas corporis per solum locum in quo hæret non determinatur; id quod usu venit, vel si centra illa ad quæ corpus sollicitatur fuerint mobilia, vel si motus fiat in medio resistente. Hac facta divisione; notandum est, quoties motus corporis ad prius genus pertineat, hoc est, si corpus non solum ad unum sed ad quotcunque centra fixa sollicitetur viribus quibuscunque, toties in motu hoc summam omnium motuum elementarium fore minimam.

14. Hoc ipsum autem postulat indoles Propositionis: dum enim, inter datos terminos, ea quæritur curva, in qua sit $\int ds\sqrt{v}$ minimum; eo ipso assumitur, celeritatem corporis in utroque termino

termino eandem esse, quæcunque curva corporis viam constituat. Quotcunque autem fuerint centra virium fixa, celeritas corporis in quovis loco M, exprimitur functione determinata ambarum variabilium $CP = x$, & $PM = y$. Sit igitur v functio quæcunque ipsarum x & y, ita ut sit $dv = Tdx + Vdy$; atque videamus, an principium nostrum veram exhibiturum sit projectoriam corporis. Cum autem sit $dv = Tdx + Vdy$; corpus perinde movebitur, ac si sollicitetur in M a duabus viribus, altera T in directione abscissis x parallela, altera vero V in directione parallela applicatis y, ex quibus oritur vis tangentialis $= \frac{Tdx + Vdy}{ds}$, & vis normalis $= \frac{-Vdx + Tdy}{ds}$. Debet autem, ex natura motus liberi, esse $\frac{2v}{r} = \frac{-Vdx + Tdy}{ds} = \frac{-V + Tp}{\sqrt{(1+pp)}}$; ad quam æquationem si Methodus maximorum ac minimorum deducat, erit utique principium nostrum veritati conforme. Fig. 27.

15. Cum igitur, per hoc principium, debeat esse $\int dx \sqrt{v}(1+pp)$ minimum, differentietur quantitas $\sqrt{v}(1+pp)$, atque, ob $dv = Tdx + Vdy$, orietur:

$$\frac{Tdx\sqrt{(1+pp)}}{2\sqrt{v}} + \frac{Vdy\sqrt{(c+pp)}}{2\sqrt{v}} + \frac{pdp\sqrt{v}}{\sqrt{(1+pp)}},$$

ex quo obtinetur pro curva quæsita sequens æquatio, secundum præcepta tradita,

$$\frac{Vdx\sqrt{(1+pp)}}{2\sqrt{v}} = d.\ \frac{p\sqrt{v}}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{dp\sqrt{v}}{(1+pp)^{1:2}} + \frac{p(Tdx+Vdy)}{2\sqrt{v}(1+pp)}$$

seu $\frac{-dp\sqrt{v}}{(1+pp)^{3:2}} = \frac{Tpdx - Vdx}{2\sqrt{v}(1+pp)}$. At est radius osculi in

$$M = \frac{-(1+pp)dx\sqrt{(1+pp)}}{dp};$$

qui si ponatur $= r$, erit

$$\frac{2v}{r} = \frac{Tp - V}{\sqrt{(1+pp)}};$$

omnino uti per Methodum directam invenitur. Dummodo ergo vires sollicitantes ita fuerint comparatæ, ut eæ reduci queant ad duas vires T & V, secundum directiones coordinatis x & y parallelas sollicitantes, quæ sint ut functiones quæcunque harum variabilium x & y, tum semper in curva

Digitized by Google

curva deſcripta erit motus corporis per omnia elementa collectus minimus.

16. Tam late ergo hoc principium patet, ut ſolus motus a reſiſtentia medii perturbatus excipiendus videatur; cujus quidem exceptionis ratio facile perſpicitur, propterea quod hoc caſu corpus per varias vias ad eundem locum perveniens non eandem acquirit celeritatem. Quamobrem, ſublata omni reſiſtentia in motu corporum projectorum, perpetuo hæc conſtans proprietas locum habebit, ut ſumma omnium motuum elementarium ſit minima. Neque vero hæc proprietas in motu unius corporis tantum cernetur, ſed etiam in motu plurium corporum conjunctim; quæ quomodocunque in ſe invicem agant, tamen ſemper ſumma omnium motuum eſt minima. Quod, cum hujuſmodi motus difficulter ad calculum revocentur, facilius ex primis principiis intelligitur, quam ex conſenſu calculi ſecundum utramque Methodum inſtituti. Quoniam enim corpora, ob inertiam, omni ſtatus mutationi reluctantur; viribus ſollicitantibus tam parum obtemperabunt, quam fieri poteſt, ſiquidem ſint libera; ex quo efficitur, ut, in motu genito, effectus a viribus ortus minor eſſe debeat, quam ſi ullo alio modo corpus vel corpora fuiſſent promota. Cujus ratiocinii vis, etiamſi nondum ſatis perſpiciatur; tamen, quia cum veritate congruit, non dubito quin, ope principiorum ſanioris Metaphyſicæ, ad majorem evidentiam evehi queat; quod negotium aliis, qui Metaphyſicam profitentur, relinquo.

INDEX

INDEX

CAP. I. De Methodo maximorum & minimorum ad lineas curvas inveniendas applicata in genere, *pag.* 1

CAP. II. De Methodo maximorum & minimorum ad lineas curvas inveniendas abſoluta, 31

CAP. III. De inventione curvarum maximi minimive proprietate præditarum, ſi in ipſa maximi minimive formula inſunt quantitates indeterminatæ, 83

CAP. IV. De uſu Methodi hactenus traditæ in reſolutione varii generis quæſtionum, 129

CAP. V. Methodus, inter omnes curvas eadem proprietate præditas, inveniendi eam quæ maximi minimive proprietate gaudeat, 171

Digitized by Google

CAP. VI. Methodus, inter omnes curvas pluribus proprietatibus communibus gaudentes, eam determinandi quæ maximi minimive proprietate prædita sit, 227

ADDITAMENTUM I. De Curvis elasticis, 245

ADDITAMENTUM II. De Motu Projectorum in medio non resistente, per Methodum maximorum ac minimorum determinando, 311

FINIS.

Digitized by Google

I. *Fig.* 2.

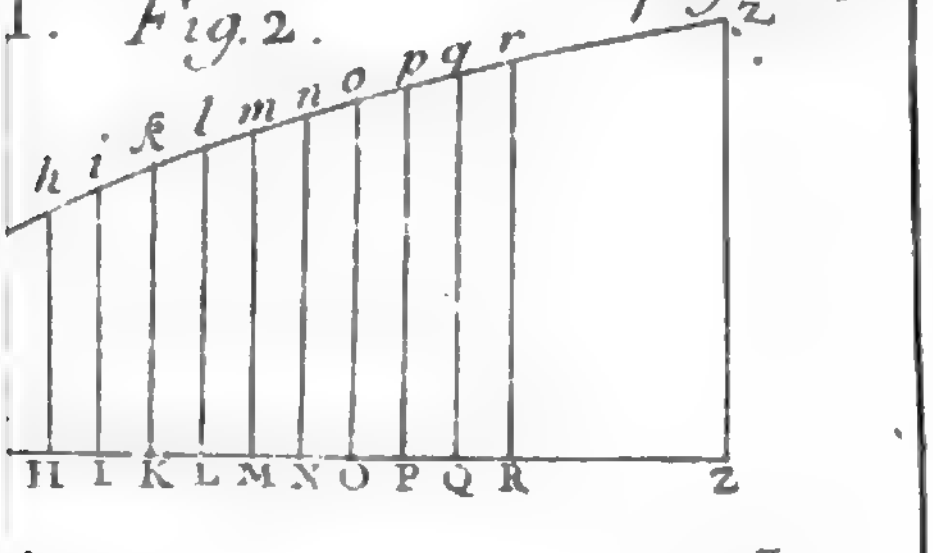


Fig. 4.

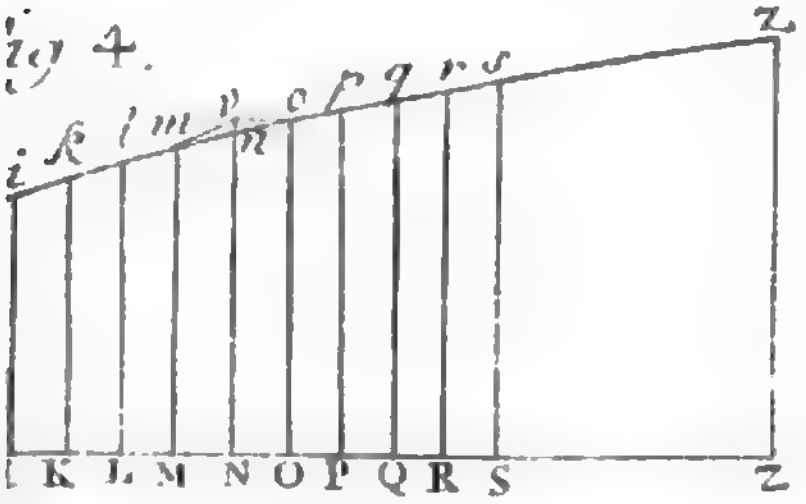


Fig. 6.

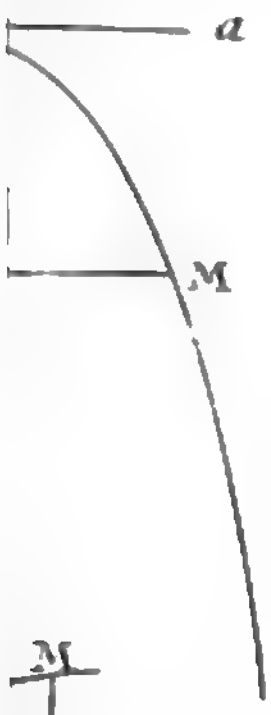


Fig. 7.

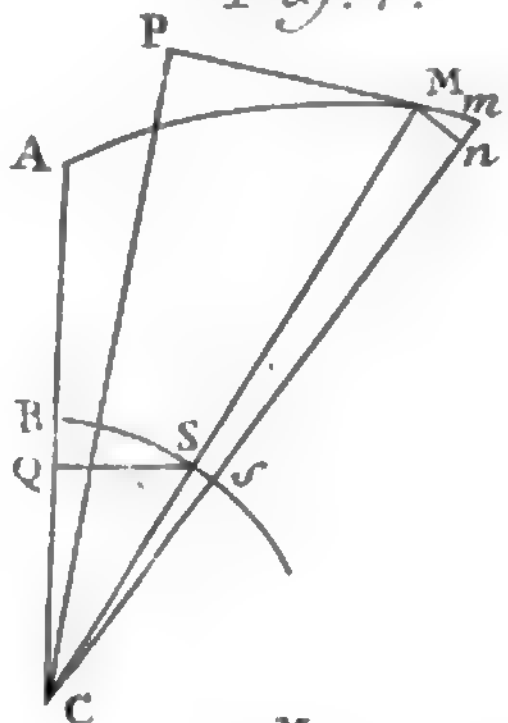
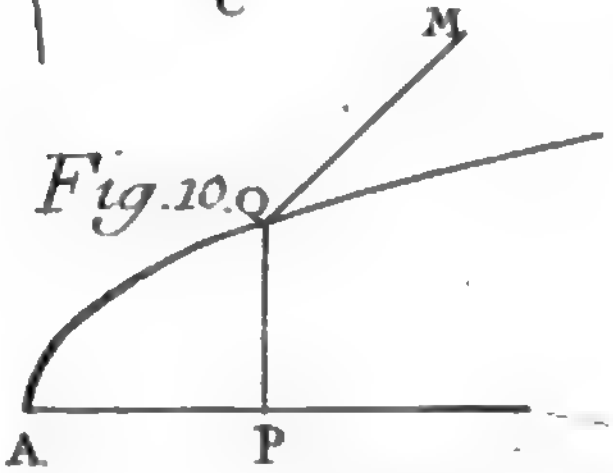


Fig. 10.



Digitized by Google

.a.II.

.12.

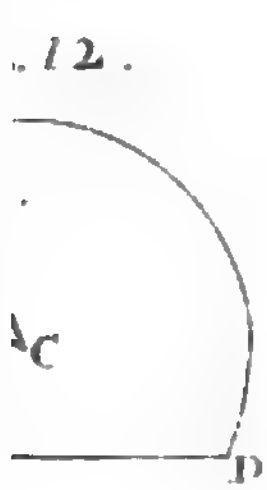


Fig. 13.

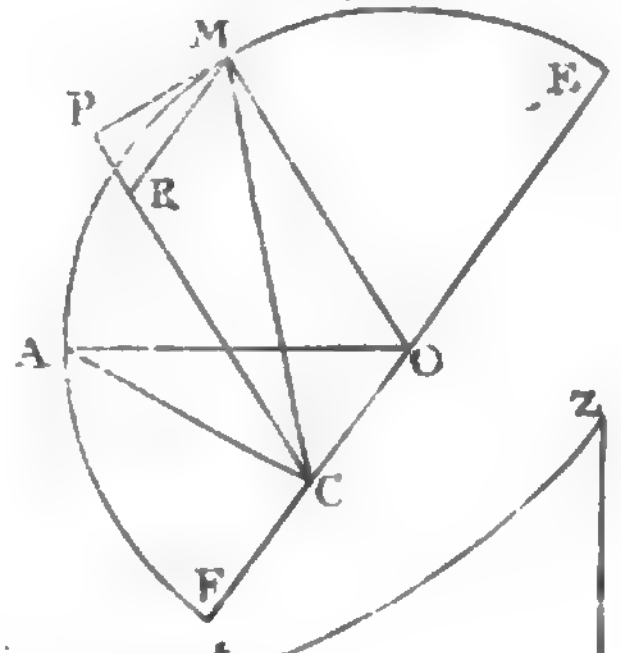
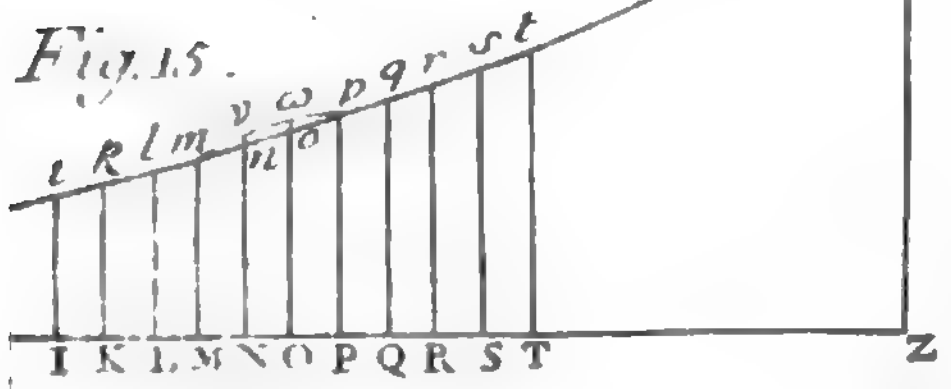


Fig. 15.



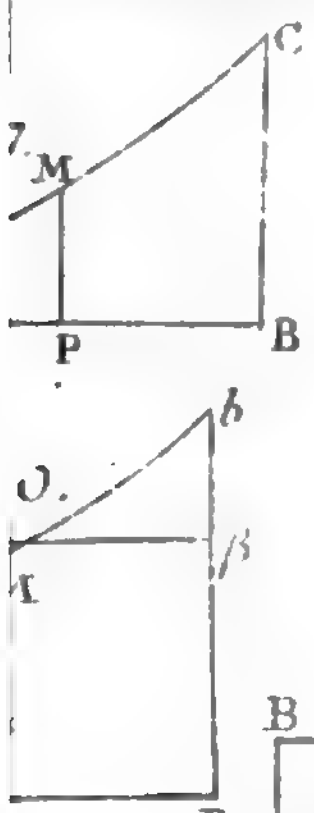


Fig. 18.

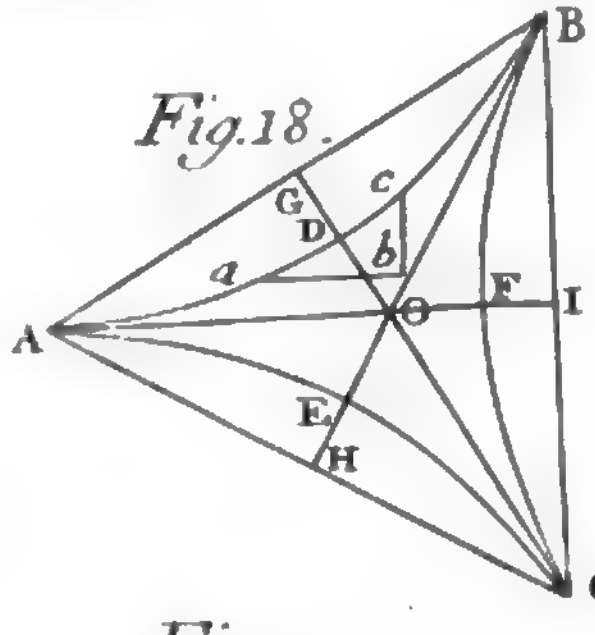
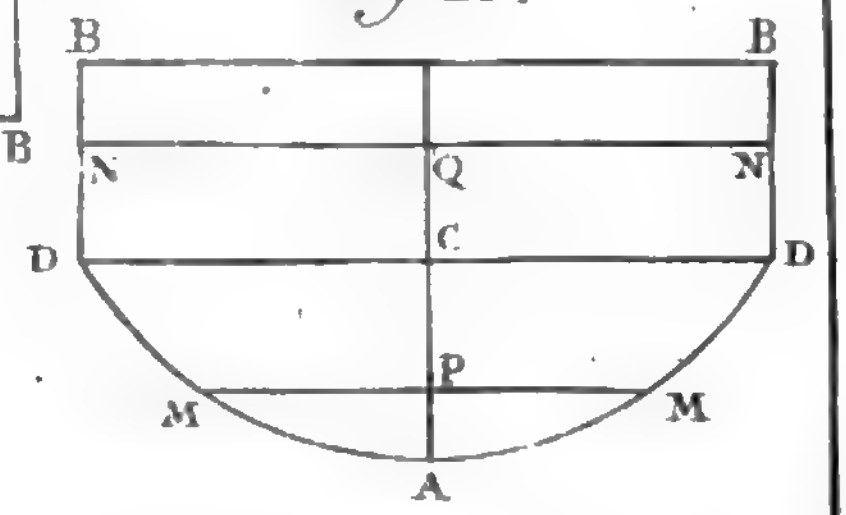


Fig. 21.



III. *Additamentum.*

B

Fig.3.

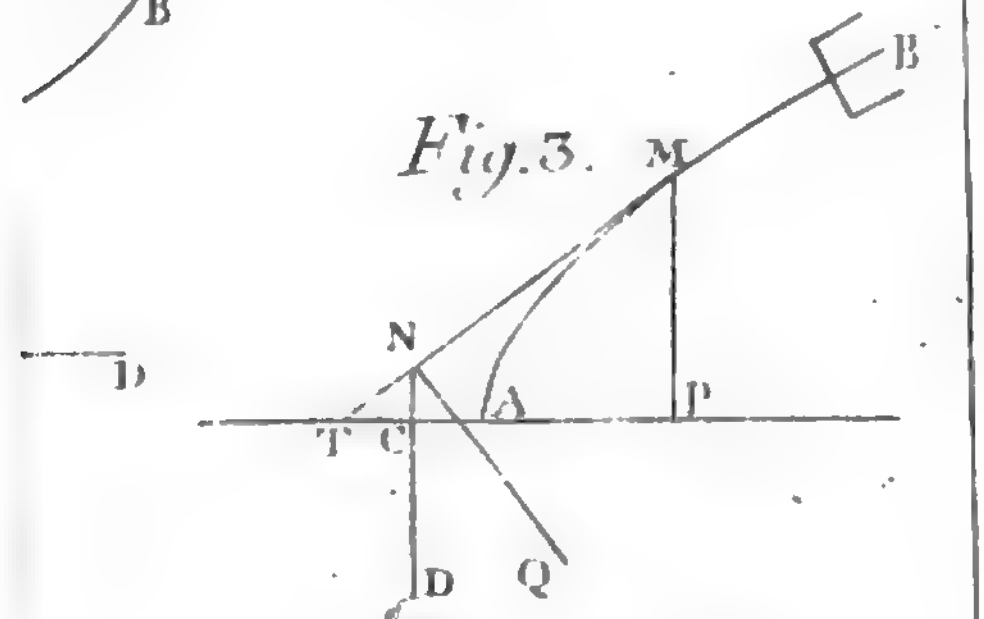


Fig.5.

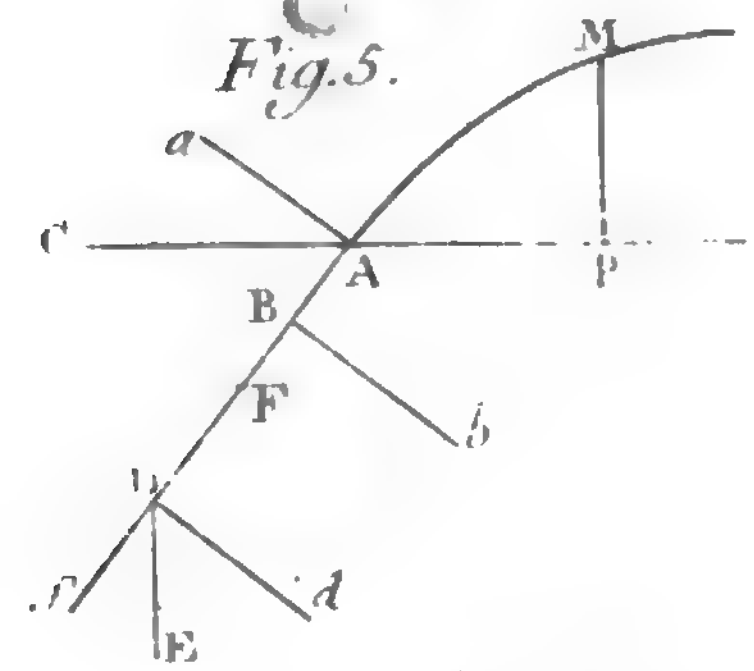
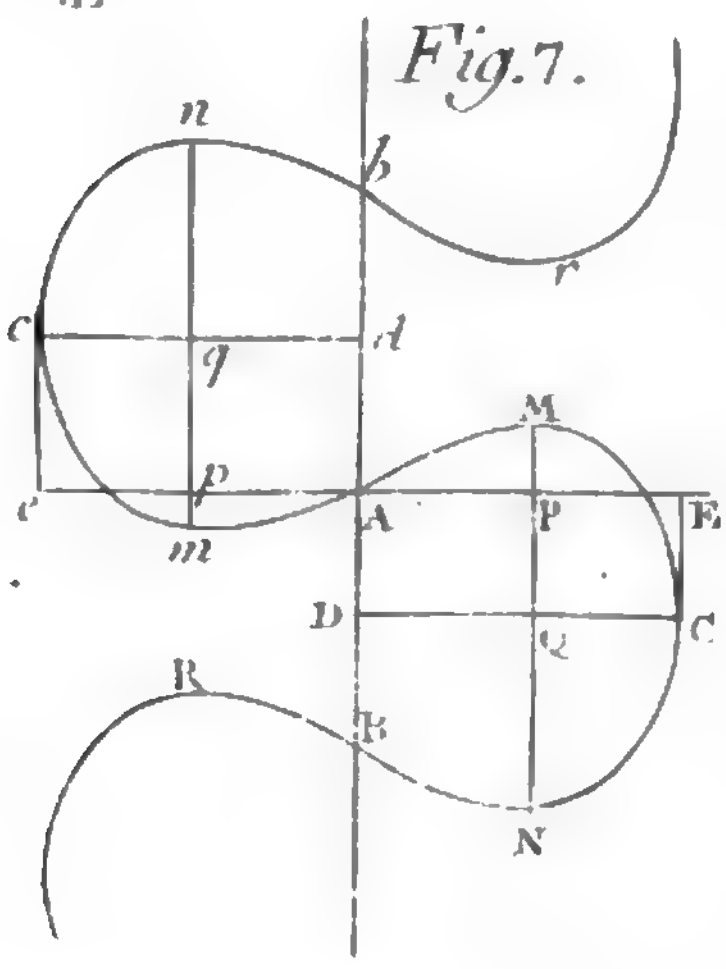


Fig.7.



Additamentum.

Tabula IV.

Fig. 9.

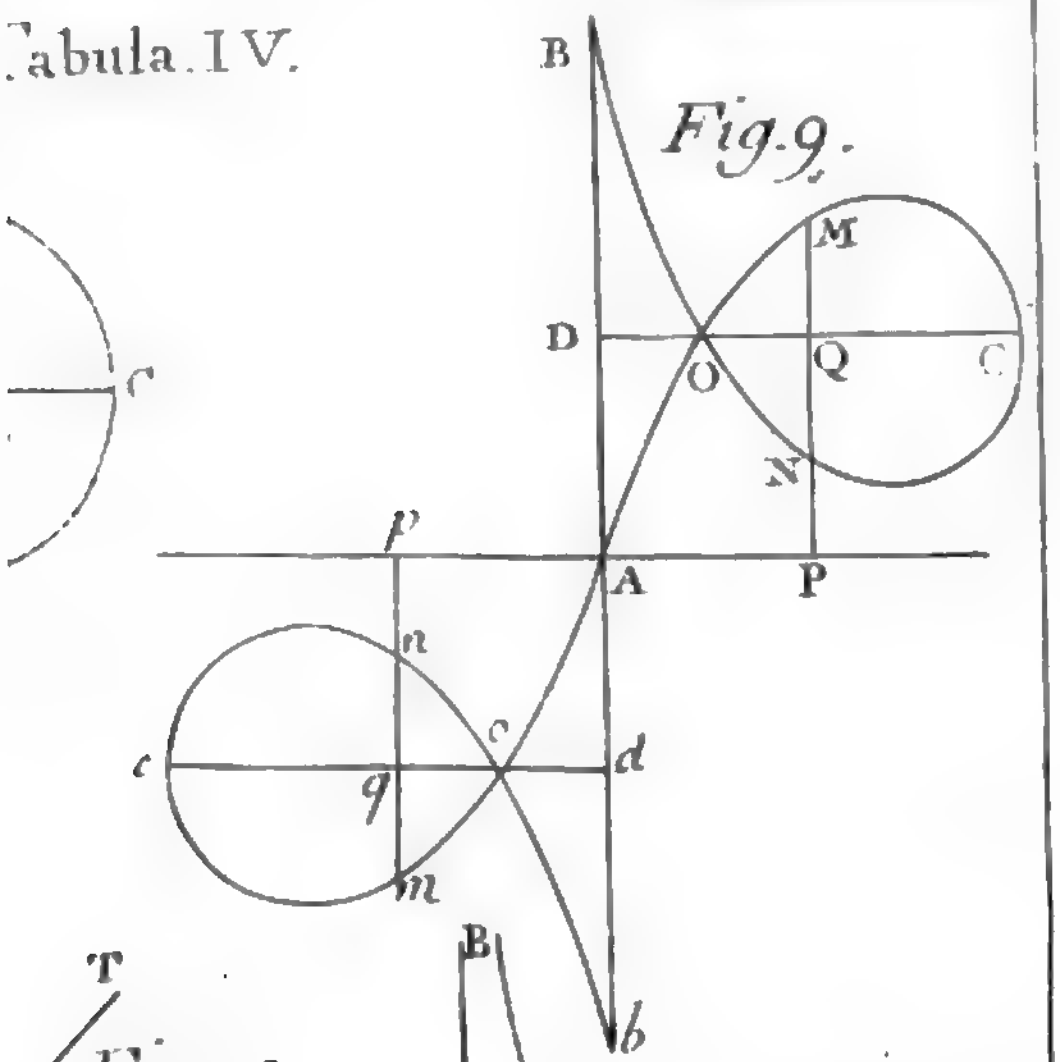


Fig. 12.

Fig. 13.

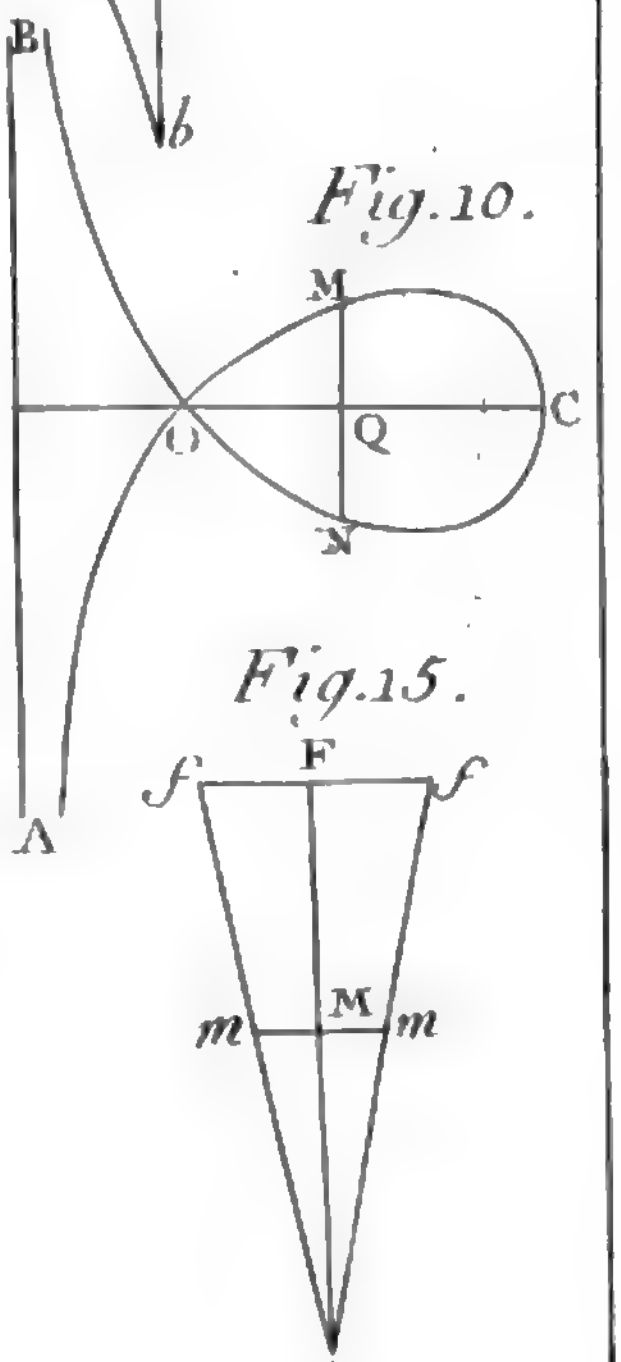
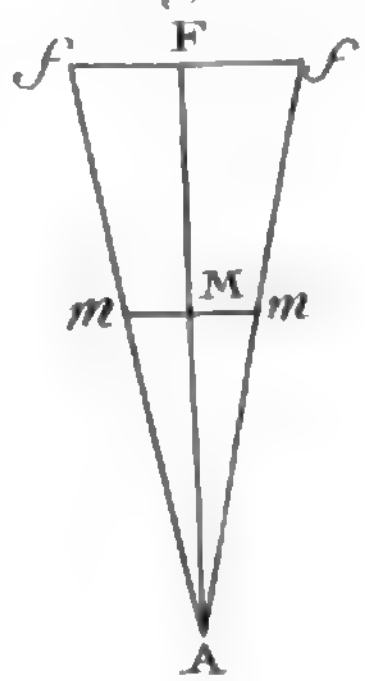


Fig. 10.

Fig. 15.



la V. *Additamentum.*

Fig. 17.

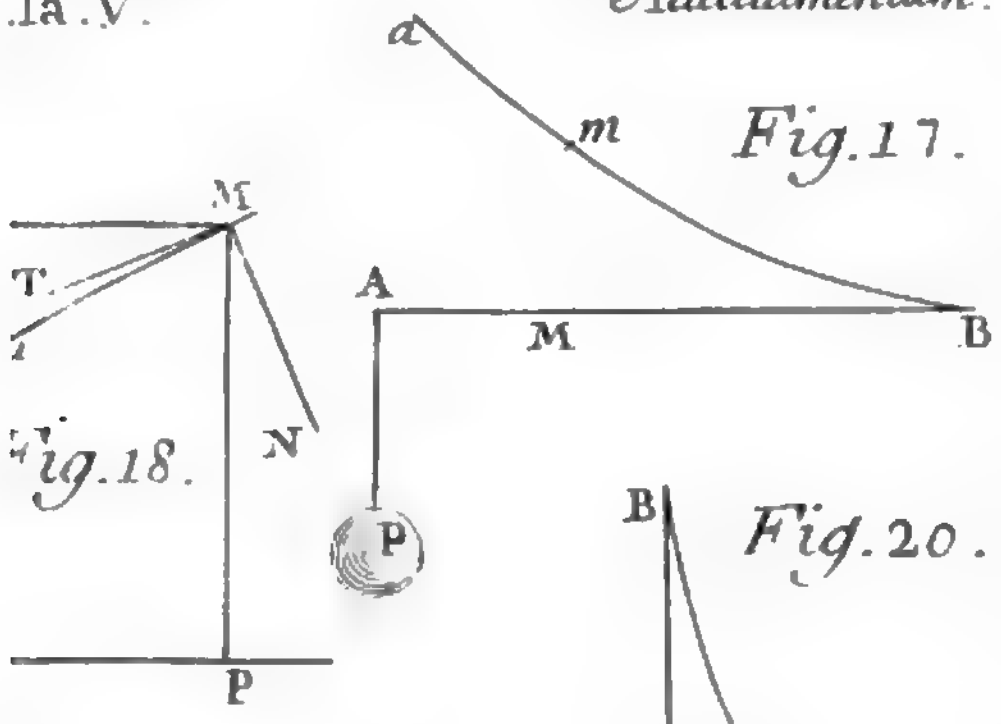


Fig. 18.

Fig. 19.

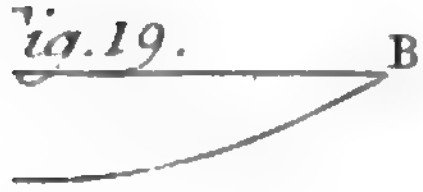


Fig. 20.

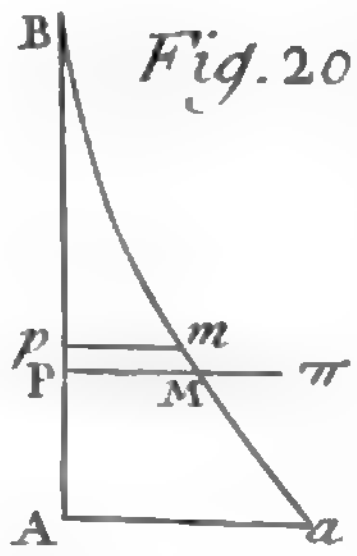


Fig. 22.

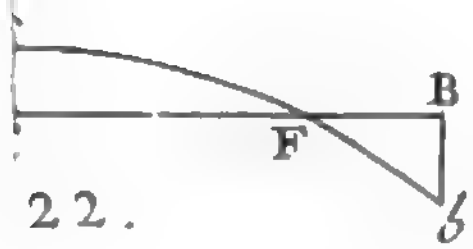


Fig. 23.

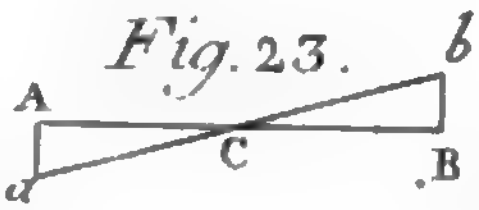


Fig. 25.

Fig. 27.

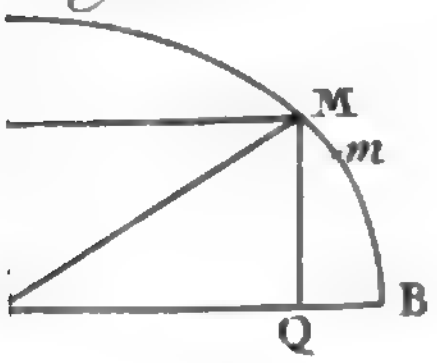
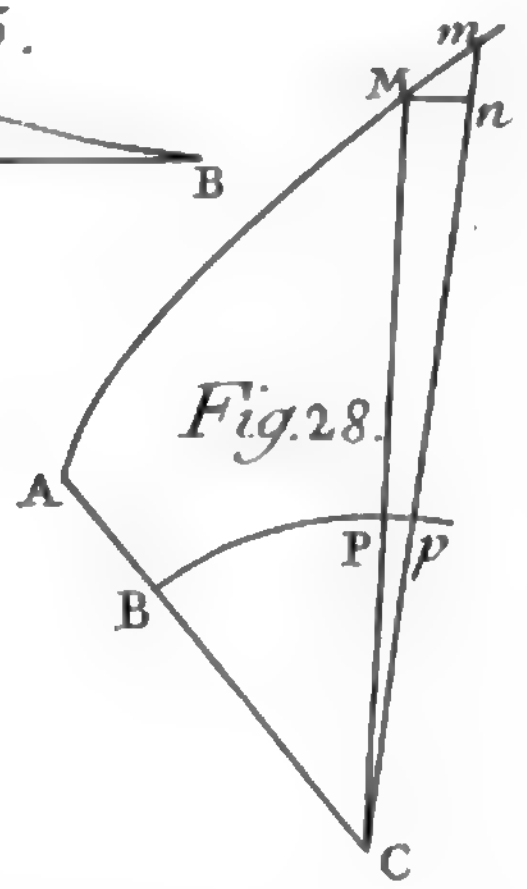


Fig. 28.



Monitum ad Bibliopegam.

Tabulæ omnes Figurarum ad calcem compingantur, vel duæ priores poſt paginam 244 inſerantur, poſteriores tres ad calcem ponantur.

Avis au Relieur.

Il placera les cinq Planches de Figures à la fin du Livre, ou bien, il mettra les deux premieres à la page 244, & les trois dernieres à la fin.

Digitized by Google

Digitized by Google

5-5-253

Digitized by Google

CB

Digitized by Google